BEITRÄGE ZUR THEORIE DER WARTESYSTEME

DISSERTATION

zur Erlangung des wirtschaftswissenschaftlichen
Doktorgrades der Wirtschafts- und
Sozialwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
PETER HOHN
Dipl. Phys.
aus Bremen

Göttingen 1966

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544311_0042

BEITRÄGE ZUR THEORIE DER WARTESYSTEME

DISSERTATION

zur Erlangung des wirtschaftswissenschaftlichen
Doktorgrades der Wirtschafts- und
Sozialwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

PETER HOHN
Dipl. Phys.
aus Bremen

Göttingen 1966

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

Berichterstatter: Prof.Dr.A.A N G E R M A N N

Mitberichterstatter: Prof.Dr. H E N N

Tag der mündlichen Prüfung: 18.Februar 1966

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit gliedert sich inhaltlich in drei Hauptteile. Der erste Teil behandelt die Bedeutung stochastischer, speziell Markoffscher Prozesse in der Wirtschaftstheorie. Diese Anwendung läßt sich i.a. auf Warteschlangenprobleme zurückführen.

Ausgehend von dem schrittweisen Vorgehen der wissenschaftlichen Methodik (sie macht die Markoffschen Prozesse geradezu prädestiniert für Modellbetrachtungen) wird kurz die Stellung der Ökonomie im System der Wissenschaften und damit die Anwendbarkeit naturwissenschaftlicher Methoden auf die Ökonomie gestreift. Der zweite Abschnitt dieses ersten Teiles befaßt sich mit der Objektivierung des Subjektiven und damit der Bedeutung stochastischer Prozesse und der dritte Abschnitt endlich mit Warteschlangenproblemen.

Im zweiten Teil dieser Arbeit befassen wir uns mit der Verteilung der Schlangenlänge, wobei wir mit der Ein - führung der Erlangschen Stufenmethode und einer geeigneten Transformation der Zeitachse Reduzierung auf den Markoffschen Fall kennenlernen. Es ergeben sich dabei verschiedene Behandlungsweisen, je nachdem, ob nur endliche Schlangenlängen zugelassen sind oder nicht. Im ersten Fall werden wir die Matrixmethode mit Erfolg anwenden, im zweiten Fall die Methode der erzeugenden Funktionen.
Im dritten Teil wird auf die Verteilung der Wartezeiten eingegangen. Es ergibt sich dabei, daß sich die Laplace-Transformation ihrer Verteilung direkt durch Benutzung der im zweiten Teil gefundenen erzeugenden Funktionen ermitteln läßt.

Inhaltsverzeichnis:

A. Stochastische Prozesse in der Ökonomie

I. Die Ökonomie im System der Wissenschaften.... 1

II. Objektivierung des Subjektiven, Unsicherheitsfaktoren 6

III. Warteschlangenprobleme..... 11

1. Einführung..... 11

2. Erzeugende Funktionen und Laplace Transformierte..... 16

B. Die Verteilung der Warteschlangen

I. Bedingungen für einen Markoffschen Prozeß... 18

II. Methoden zur Reduktion auf den Markoffschen Fall..... 27

1. Die Stufenmethode..... 27

2. Abbildung der Zeitachse..... 31

III. Anwendung auf die Pearson-Verteilungen..... 32

1. Systematik der Pearson-Verteilungen.... 32

2. Anwendung der Stufenmethode..... 40

3. Abbildung der Zeitachse..... 43

a. Exponentialansatz für $\tau(t)$..... 43

b. Trigonometrische Funktionen..... 46

IV. Markoffsche Prozesse mit Ringschluß..... 48

1. Die erzeugende Funktion als Flußgröße.. 48

2. Zweistufenringsysteme..... 54

3. Mehrstufenringsystem 58

4. Mehrstufenringsystem mit $\lambda_i = \lambda_i(k)$.... 59
5. Kettenverzweigung..... 61
6. Systeme mit oberer Begrenzung..... 63
V. Stufenprozesse ohne Ringschluß..... 65
1. Zweistufensystem ohne Ringschluß..... 65
2. Mehrstufensystem ohne Ringschluß..... 69
VI. Systeme mit Doppelbegrenzung..... 71
1. Systeme mit Verlusten..... 71
2. Näherungslösungen für große Kapazitäten.. 74
3. Matrixprobleme..... 76
4. Kanalsysteme..... 80
5. Parallel geschaltete Kanäle..... 88
6. Graphische Verfahren..... 89
7. Kombinierte Systeme..... 92

C. Anwesenheits- und Wartezeiten

I. Allgemeines..... 95
II. Unendliche Kapazität..... 96
III. Kanalsysteme..... 98 98
IV. Blockierung von Bearbeitungsstellen..... 100
1. Das stochastische Fließband..... 102
2. Die Matrixmethode..... 105
V. Mehrere Bearbeitungsstellen für die gleiche Warteschlange..... 111
1. Kanäle..... 114
VI. Die Hauptfälle der Warteschlangentheorie.. 115

1. Maschinenwartung..... 115
2. Verkehrsprobleme..... 119
3. Lagerhaltung..... 122
4. Stochastische Entscheidungsprozesse.. 122

TEIL A

STOCHASTISCHE PROZESSE IN DER ÖKONOMIE

I. Die Ökonomie im System der Wissenschaften.

Vor einigen Jahren noch war es vermessen, in den Wirtschaftswissenschaften eine wissenschaftliche Arbeit mit vorwiegend mathematischem Inhalt zu verfassen.
Daß das heute nicht mehr der Fall ist, liegt daran, daß sich die Ökonomie mehr und mehr ihrer eigenartigen Stellung im System der Wissenschaften bewußt wurde.

In der Wissenschaft kommt es auf ein durch Denkakte ermöglichtes Erkennen der Welt an.Dabei folgt ein Denkakt dem anderen, so daß unser Erkennen nicht ein zeitloses Erschauen aller Sachverhalte, sondern ein schrittweises Erfassen ist. Wissenschaft ist notwendig Analyse des Lebens, die dem Leben nutzbar gemacht werden kann. Es folgt daraus zweierlei: Für jede Wissenschaft ist ihre Sachgebundenheit (Objektivität)wesentlich, da sie als (geistige) Erkenntnis notwendig nach der Wahrheit streben muß. Die andere Wesenseigenschaft jeder Wissenschaft ist ihr methodisches Vorgehen,der Begründungszusammenhang, den sie sucht. Dieser kommt nicht durch planloses Aneinanderreihen irgendwelcher Beobachtungen und Gedanken zustande, sondern erfordert ein planvoll geordnetes, d.h. methodisches, Beobachten und Denken. Das wichtigste methodische Hilfsmittel ist die wissenschaftliche Terminologie, die Fachsprache, die für die Begriffe der Wissenschaft möglichst klare und eindeutige Bezeichnungen zu bieten sucht. Diese Terminologie ist wohl am konsequentesten in den Naturwissenschaften durchgeführt, und zwar unter möglichst weitgehender Benutzung der mathematischen Formelsprache.
Die Frage nach den Methoden einer Disziplin ist unlösbar verbunden mit der Bestimmung und Abgrenzung ihres Objekts.

Wir können dabei (wie in der Methodologie der klassischen Nationalökonomie) von der Methode ausgehend das Objekt bestimmen, oder vom Objekt ausgehend die geeigneten Methoden entwickeln . Bei der ersten Schlußweise ist man sich allerdings nicht klar darüber, daß diese Methoden bereits vorher am Objekt ausgebildet sind und nun bloß zum Prinzip erhoben und logisch durchgeformt werden. Nur hierbei ist die Möglichkeit eines Methodenmonismus gegeben, der in der klassischen Nationalökonomie bis zum berühmten Methodenstreit zwischen Schmoller und Menger eine solch wichtige Rolle spielte, inzwischen aber wohl als überholt gelten dürfte.

Geht man dagegen von der Einheit eines realen Objektes aus, so kommt man notwendig zum Methodenpluralismus,denn dieses Objekt ist sicher nicht von eindeutiger Beschaffenheit und Struktur im Sinne der Erfaßbarkeit durch eine Methode . Das Beispiel der Astronomie mag dieses bestätigen:Diese empfängt ihren Charakter als logisch einheitliche Wissenschaft nicht aus einer ihr eigentümlichen Methode, sondern aus ihrem Erkennungsobjekt "Erscheinungen der Himmelskörper und ihrer Bewegungen". Dazu bedient sie sich unter anderem der sehr verschiedenartigen Me - thoden einer direkten Beobachtung (Fernrohr), der Photographie, der statistischen Methode, der mathematischen Berechnung und der Spektralanalyse. Das Zusammenspiel der Methoden und ihrer wechselseitigen Kontrolle führte dabei zu den großartigsten Ergebnissen wissenschaftlicher Forschung. Wenn es gelang, Ereignisse am Himmel auf die Minute vorauszusagen oder die Existenz noch nicht entdeckter Gestirne zu errechnen, die später in der Tat durch direkte Beobachtung erwiesen wurden, so spricht das ebenso für die Methoden wie übrigens für die Realität der Außenwelt. Es sei hier nur an die Vermutung des

Planeten Neptun durch Bessel im Jahre 1823, die Berechnung seiner Bahn aufgrund von Störungseffekten anderer Planetenbahnen und seine endliche Entdeckung mit dem Fernrohr im Jahre 1846 erinnert, eine Leistung, die auch erkenntnistheoretisch von weittragender Bedeutung war.

Aus der Berechenbarkeit physikalischer Vorgänge (innerhalb von Fehlergrenzen) folgt nämlich, daß die Gesetze der mathematischen Logik die logisch-mathematische Sphäre überschreiten und darüber hinaus Gültigkeit in der realen haben, so daß also die eine auf die andere übergreift. Mithin gibt es Erkenntnisprinzipien, die nicht nur für alle Subjekte (mit entsprechender Vorbildung)dieselben sind, sondern auch als Kategorien in der Welt der Objekte auftreten. Daraus erhebt der u.a. von der modernen Physik stark beeinflußte Neupositivismus die Forderung,daß (zumindest in den Naturwissenschaften) jeder Satz verifizierbar sein muß, entweder durch bündigen logischen Beweis oder durch Erfahrung, d.h. es muß angegeben werden können, wie beschaffen die Erlebnisse sein müssen, die ihn bestätigen.

Die Verifizierung wird dagegen problematisch für den Bereich der Geistes-oder Kulturwissenschaften, deren Erkenntnisobjekte psychischer oder psychophysischer Natur sind. Hier kann nicht mehr das Objekt vom Subjekt abstrahiert werden. Das Handeln des Subjekts wird selbst zum Objekt wissenschaftlicher Untersuchung. Waren in den Naturwissenschaften die Fehlergrenzen Ausdruck der Beschränkung der mathematisch-logischen Sphäre durch subjektive Einflüsse des Beobachtenden auf die Meßergebnisse und die dem Objekt zuzubilligende eigene Freiheit,die seine Individualität berücksichtigen (die ganz strenge Kausalität ist auch hier verlassen), aber war es hier

durch entsprechende Anlegung der Experimente noch möglich, beides weitgehend zu trennen, so ist dies in den Geisteswissenschaften schon wegen der größeren Ungleichheit und Freiheit der Individuen und der dafür umso größeren Ununterscheidbarkeit zwischen Subjekt und Objekt nur noch beschränkt möglich. Das bedeutet eine verstärkte Wechselwirkung zwischen Subjekt und Objekt, u.U. auch eine Aufstellung von Wertungsmaßstäben für das psychische Erkenntnisobjekt. Dazu kommt, daß Experimente in den Geisteswissenschaften, falls sie überhaupt möglich sind, sehr häufig nicht reproduzierbar sind und von sehr vielen, meist nicht isolierbaren Faktoren abhängen. Es folgt daraus, daß die Übertragung naturwissenschaftlicher Methoden auf die Geisteswissenschaften meist mit sehr großen Schwierigkeiten verbunden ist. Eine Anwendung erscheint dabei höchstens auf Wissenschaften mit psychophysischen Erkenntnisobjekten möglich. Dagegen sollte an der Kontrolle verschiedener Methoden sowie dem Versuch einer weitgehenden Übereinstimmung mit der Erfahrung festgehalten werden.

Eine eigenartige Stellung innerhalb des Systems der Wissenschaften nehmen, wie anfangs erwähnt, die Wirtschaftswissenschaften oder Ökonomie ein.
(Beide Bezeichnungen können ersatzweise verwandt werden, doch sollte man sich darüber klar sein, daß die Bezeichnung WW ausdrückt, daß es sich um mehrere eng verwandte Wissenschaften handelt, bei denen jede ihr eigenes Erkenntnisobjekt besitzt.Der Bezeichnung Ökonomie liegt dagegen die Überzeugung zugrunde, daß es sich um eine Wissenschaft mit verschiedenen Zweigen handelt, die sich aber letzten Endes nur durch ihre Methoden unterscheiden.)

Ökonomie ist seit Aristoteles im Gegensatz zur Bezeichnung staatsbürgerlichen Handelns und Wissens als Politik Tatbestand und Erkenntnis derjenigen menschlichen Verge-

sellschaftung, die zunächst im Rahmen eines größeren oder kleineren Familienhaushaltes (Oikos) sodann auch im Verkehr mehrerer solcher Haushalte untereinander die Lebensfürsorge der Menschen regelt. Man sieht daraus einmal, daß die Ökonomie Nationalökonomie und Betriebswirtschaftslehre umfaßt, zum anderen, daß sie Teil einer größeren Wissenschaftsgesamtheit, der Sozialwissenschaft oder Soziologie ist.

Es ist daraus bereits deutlich ersichtlich, daß das Erkenntnisobjekt "Wirtschaft" der Ökonomie psychophysischen Charakters ist, also durch ein System von Beziehungen zwischen Subjekten und physischen Objekten gekennzeichnet ist. Das bedeutet aber, daß u.U. auch Methoden der Naturwissenschaften auf die Ökonomie übertragbar sind. Das aber würde bedeuten, daß es auch in der Ökonomie möglich sein müßte, mit der generalisierenden Forschungsmethode zu arbeiten, die ja auf allgemeine, grundsätzlich wiederholbare Erkenntnis zielt und aus der Forderung einer jederzeitigen Verifizierung gefolgert werden muß. Diese aber ist schon deshalb anzustreben, da die Ökonomie nicht nur im Status einer reinen (auf Erkenntnis oder Bereicherung des Wissens zielenden) Wissenschaft stehen bleiben möchte, sondern auch angewandte (zu einem für das praktische Leben nützlichen Können führende) Wissenschaft sein will.

II. OBJEKTIVIERUNG DES SUBJEKTIVEN, UNSICHERHEITSFAKTOREN.

Die Schwierigkeit einer Objektivierung des Subjektiven ist auch heute noch eins der Hauptprobleme der gesamten Ökonomie. Sie läßt sich vielleicht noch am weitgehendsten im Rahmen eines völlig durchorganisierten, einem einzigen Plan gehorchenden Betriebes lösen. Soweit das Betriebsgeschehen ein rein technischer Vorgang ist, wird sich diese Objektivierung und damit auch die Einführung naturwissenschaftlicher Methoden durchführen lassen. Voraussetzung ist lediglich, daß die Betriebsziele, denen der Plan dienen soll, genügend scharf definiert sind und man alle nötigen Informationen über den Betriebsablauf gewinnen kann. Sobald man diese Informationen nicht hat oder menschliche Arbeitsleistungen für das Betriebsgeschehen wesentlich werden, stößt die Objektivierung auf natürliche Grenzen. Das beginnt bei einem voll automatisierten Betrieb etwa mit dem unvermeidlichen Ausfall von Maschinen und ihrer Wartung durch eine Reparaturkolonne. Sowohl über den Zeitpunkt des Ausfalls wie auch über die Dauer der einzelnen Reparaturen können dabei oft nur Wahrscheinlichkeitsaussagen gemacht werden. Noch komplizierter liegen die Probleme, wenn nicht nur bei Ausfall von Maschinen, sondern bereits für den Produktionsprozeß selbst menschliche Arbeitsleistungen wesentlich werden. In diesem Fall kann zwar von den Erfahrungen der Vergangenheit ausgegangen werden, doch läßt sich ein gewisser Unsicherheitsfaktor sicher nie vermeiden. Der gesamte Produktionsprozeß kann demnach als ein geeignet definierter stochastischer (d.h. mit Unsicherheiten behafteter) Prozeß definiert werden. Die Unsicherheiten bedingen, daß innerhalb des Betriebsablaufs Anpassungsschwierigkei-

ten zu Stauungen führen, die etwa durch die Anlage geeigneter Zwischenlager aufgefangen werden können. Noch stärker werden diese Schwierigkeiten, wenn es um die Beziehungen zwischen einzelnen Betrieben und damit i.a. verschiedener Wirtschaftspläne geht. Jeder Betrieb ist bekanntlich mit der Gesamtwirtschaft einmal über den Beschaffungsmarkt (Kapitalbeschaffung, Beschaffung von Produktionsfaktoren), zum anderen über den Absatzmarkt verbunden. Beide sind aber undenkbar ohne eine genaue Bewertung der zu beschaffenden und abzusetzenden Güter, wie auch die Ziele, Strategien und Potentiale aller Wirtschaftssubjekte auf den entsprechenden Märkten, eingeschlossen natürlich die eigene Position (soweit sie sich einer Quantifizierung nicht völlig entziehen). Eine Bewertung schließt aber stets ein bestimmtes Risiko in sich, kann also lediglich eine Wahrscheinlichkeitsaussage sein, etwa charakterisiert durch einen bestimmten Erwartungswert und eine Fehlerangabe. Aus diesen Gründen der Unsicherheit ist es für jedes Wirtschaftssubjekt un erläßlich, Reserven in Form von Materiallagern als auch finanzieller Art zu halten.

Die Ökonomie des 19.Jh. machte sich dieses Problem sehr einfach. Sie trieb die Objektivierung des Subjektiven und damit die Automatisierung des gesamten Wirtschaftslebens so weit, daß sie für jedes Wirtschaftssubjekt unterstellte, die Maximierung des Reingewinns zu erstreben (homo oeconomicus) und eine genaue Kenntnis seiner Kostenkurven zu besitzen,und außerdem für jeden Markt atomistische Konkurenz annahm, so daß also die Anbieter grundsätzlich als Mengenanpasser auftraten. In diesem Fall läßt sich tatsächlich die Anwendung naturwissenschaftlicher "speziell mathematischer" Methoden am weitesten treiben, nur entspricht das zugrunde gelegte Mo-

dell durchaus nicht mehr der heutigen wirtschaftlichen Wirklichkeit. Darüber hinaus war man fast immer an Fragen eines stati schen Gleichgewichts interessiert,ließ also den Faktor Zeit fast völlig fort. In welch starkem Maße zeigt die berühmte Lohnfondstheorie von Ricardo: Wird der Lohn über ein bestimmtes Existenzminimum erhöht, so steigt die Heiratsziffer und damit auch die Zahl der Geburten. Die dadurch veranlaßte Zunahme des Angebots an Arbeitskraft drückt den Lohn wieder herunter, bis das Existenzminimum wieder erreicht ist. Umgekehrt würde eine Senkung des Marktlohnes unter den "natürlichen"Preis die Vermehrung der Menschen hemmen, bis der Lohn wieder auf die Höhe des Existenzminimums gestiegen ist.

Man sieht hierin neben unbewiesenen kausalen Abhängig - keiten ein völliges Mißverhältnis zum Zeitbegriff.Speziell wird als ein Unsicherheitsfaktor die Reaktion der Wirtschaftssubjekte auf bestimmte wirtschaftliche Änderungen erst nach Ablauf einer endlichen Zeit völlig übersehen.

Nachdem wir also erkannt haben, wie wichtig der Zeitbegriff für eine moderne Wirtschaftstheorie ist, und daß wir aufgrund von Subjektivismen in den Bereichen, die einer Quantifizierung zugänglich sind, für jeden Zeitpunkt für Wirtschaftsprozesse i.a. nur Wahrscheinlichkeitsaussagen machen können, fragt sich, wie ein solcher zeitabhängiger Zufallsprozeß (stochastischer Prozeß) auszusehen hat. Offenbar derart, daß das Geschehen in einer Periode von dem in den Vorperioden abhängig ist, also von den Datenkonstellationen, wie sie sich etwa in den einzelnen Bilanzen niederschlägt (falls sie nur genau genug sind und man die Einzelposten nicht als Zahlen, sondern als Zufallsvariable mit bestimmtem Erwartungswert

und bestimmter Varianz auffaßt), und den Veränderungen in diesen Perioden. In der vorliegenden Arbeit werden dabei im wesentlichen solche stochastische Prozesse betrachtet, bei denen das Geschehen in einer Periode lediglich von der Situation zu Beginn dieser Periode abhängt, aber nicht etwa von dem Geschehen früherer Perioden. Solche Prozesse werden als Markoffsche Prozesse[a] bezeichnet. Ihnen liegt derselbe Gedanke zugrunde, wie etwa auch in der Buchhaltung, wo sich das Geschehen der Vorperioden auch lediglich in der Eröffnungsbilanz wiederspiegelt. Derartige Prozesse symbolisieren aber auch in hervorragender Weise das methodische, schrittweise Vorgehen in der Wissenschaft und sind daher für Modellbetrachtungen geradezu prädestiniert.

Der Wert dieser Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen liegt offenbar nicht darin, daß man sie überhaupt anstellen kann, sondern daß die höheren Momente der entsprechenden Verteilungen, speziell die Varianz als Maß für die Fehlerbreite, bestimmt aus den Erfahrungen der Vergangenheit, genügend klein sind, um brauchbare Ergebnisse zu erzielen. Das wird umso besser sein, je mehr man es mit ausgesprochenen Massenerscheinungen zu tun hat. Auch von einem bestimmten radioaktiven Atom läßt sich nicht angeben, wann es zerfällt, doch hat man deren sehr viele (Größenordnung 10^{20}, also groß gegenüber den Zahlen, mit denen man es üblicherweise in der Ökonomie zu tun hat), so ist ihr Zerfall streng ein Markoffscher Prozeß.

Wir werden nicht untersuchen, wie die einzelnen Wahrscheinlichkeitsverteilungen und die in ihnen auftretenden Parameter bestimmt werden können. Das würde den Rahmen dieser Arbeit bei weitem sprengen. Es war lediglich als Aufgabe angesehen worden, wie bei wirtschaftlichen

Anpassungsschwierigkeiten in Form von Stauungen die wesentlichen Größen für die Verteilung der Schlangenlänge wie für die auftretenden Wartezeiten von diesen Parametern abhängen, um damit aufzuzeigen, an welchen Stellen Engpässe vorliegen und wie sich durch deren Beseitigung die interessierenden Größen verändern.

III. WARTESCHLANGENPROBLEME

1. Einführung.

In vielen Situationen, bei denen Stauungen wirtschaftlicher und technischer Abläufe auftreten, lassen sich Warteschlangenbetrachtungen anstellen. Warteschlangen treten besonders dann auf, wenn der Zufluß zu einem Bearbeitungssystem und die Verweildauer in diesem stochastisch verteilt sind, und zwar als Folge fehlender oder mangelnder Anpassung,. Durch die Passierung des Bearbeitungssystems wird der Fluß moduliert, so daß der Abfluß i.a. eine ganz andere Form hat. Es ergeben sich nun verschiedene Probleme, je nachdem ob der Strom durch ein weiteres System (etwa das Laufzeitensystem bei der Maschinenwartung) wieder in das Bearbeitungssystem eintritt (Fall des geschlossenen Ringstroms) oder in einem Endzustand verharrt.Selbstverständlich können auch im Bearbeitungssystem selbst Anpassungsschwierigkeiten auftreten, was zu zusätzlichen Warteschlangen oder Zwischenlagern führt. Förstner [1] erwähnt folgende Anwendungsbereiche (Die Lagerhaltung wird hier extra behandelt):

Kontrolle der Ankunft von Flugzeugen oder Schiffen
Beladen und Entladen von Transpostmitteln.
Planung von Nachrichtenvermittlungen.
Verkehrsprobleme (grüne Welle, Streckenbelegung, Zollstationen, Parkplätze,Taxizentralen).
Kundenbedienung in Warenhäusern und Selbstbedienungsläden.
Lagerhaltung,
Bearbeitung von Aufträgen durch Verkaufsabteilungen,
Regulierung der Qualitätskontrolle,
innerbetrieblicher Transport,

Terminpalnung bei Produktionsabläufen (bei zusammengesetzten; für limitationale Produktionsfaktoren, gemeinsame Zwischenlager und Durchgangsstellen hat man dabei die Abhängigkeit der Warteschlangen verschiedener Stellen zu berücksich - tigen).

Nachwuchsprobleme (Ausbildung und Einsatz von Fachkräften),

Instandhaltung (die Wartezeiten sind hier abhängig vom Umfang der Instandhaltungsstellen,durch die Wartezeiten treten Verzögerungen im Produktionsablauf ein).

Dafür gilt:

Einheiten	Bearbeitung	Bearbeitungsstelle
Flugzeuge,Schiffe	Kontrolle u.Durchlass	Kontrollstation
Transportmittel	Beladen,Entladen	Entladestation, Docks
Anruf	Gespräche	Telephonzentrale
Fahrzeuge	z.B.Zollabfertigung	Zollstation
Kunden	Bedienung im Laden	Verkäufer
Lieferaufträge	Bereit-u-Zustellung der bestellten Waren	Transportmittel Verkaufsabteilung
Fachkräfte	Ausbildung	Ausbildungsstelle
Maschinenstillstände	Reparatur	Mechaniker, Schlosser, oder andere

Erst nach Abschluß der eigentlichen Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist das Buch von F.Ferschl:"Zufallsabhängige Wirtschaftsprozesse (Grundlagen und Anwendungen der The-

orie der Wartesysteme)" im Physica-Verlag Wien und Würzburg (1964) erschienen, in dem besonders auch auf die Anwendung eingegangen wird. Der Gedanke des Ankunftsprozesses wurde hier bereits vertreten. Es wird ferner für den einfachsten Fall eines Wartezeitenproblems mit rein zufälligem Eingang und exponentieller Bearbeitungszeit auch die Bedeutung der erzeugenden Funktion für die Wartezeiten selbst erwähnt, ohne aber von dieser als der wesentlichen Größe der gesamten Warteschlangentheorie auszugehen.Auch der Gedanke einer der gesamten Untersuchung vorausgehenden geeigneten Transformation der Zeitachse ist noch nicht vertreten. Die Erfassung allgemeinerer Verteilungen von Ankunftszeitdifferenz und Bearbeitungszeit dürfte in der vorliegenden Arbeit auch erstmalig erwähnt sein. Besonders wichtig erscheint dabei, für diese Zwekke die Familie der Pearson-Verteilungen in geschlossener Form zu untersuchen, und damit die wichtigsten Verteilungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik zu erfassen.

Die Klassifizierung der Systeme nach den für die erzeugende Funktion geltenden Differenzen-Differentialgleichungen weicht in ihren Definitionen in manchen Punkten von den herkömmlichen ab. Das liegt schon daran, daß durch die Exponentialverteilung der einzelnen Bedienungsstufen keine Unterschiede zwischen Wartenden und in der folgenden Bearbeitungsstufe befindlichen Objekten gemacht werden müssen, man also von gemeinsamen Zuständen ausgehen kann. Das bedeutet jedoch keinen Verlust an Information für die Zahl der wartenden Einheiten, da sich diese sofort über die Kapazität der Bearbeitungsstufen ergibt. Wenn in jeder Stufe gleichzeitig nur eine Einheit bearbeitet werden kann, ist die erzeugende Funktion durch entsprechende

Wahl der in ihr auftretenden Variablen (Laplace-Transformation der Verteilung der Bearbeitungszeiten für die einzelnen Stufen) direkt zur Ermittlung der Anwesenheits- wie Wartezeiten in den einzelnen Zuständen benutzbar.

Die erzeugende Funktion liefert also gleichzeitig die beiden wichtigsten Kenngrößen der Warteschlangen, nämlich die Verteilung der Häufigkeiten der Besetzung und der Anwesenheitszeiten in den einzelnen Zuständen. Bezeichnet das gesamte System etwa einen Produktionsprozeß von der Art, daß die produzierten Güter während des Prozesses verändert werden, aber nicht verloren gehen oder neu entstehen, so sind die einzelnen Zustände Zwischenlager und nachfolgende Bearbeitungsstufen .Die Größe der Lager und die Produktionszeiten wirken sich aber kostenmäßig erheblich aus, so daß sie auch wirtschaftlich von wesentlichem Interesse sind(siehe etwa Henn [3]).So sind etwa die Lagerposten in einem bestimmten Zeitintervall dem Integral prportional, das aus dem Erwartungswert des Lagerbestandes über diese Zeit gebildet wurde (dem sog.stochastischen Integral).

Ist d ie Lagerkapazität beschränkt, so wird man die Bearbeitung in den vorhergehenden Stufen einschränken müssen, um diese nicht zu überschreiten. Das führt zu Blockierungen im Produktionsprozeß, zu mangelhafter Ausnutzung der Betriebskapazität. Das ist umso weniger der Fall, je kleiner der Mittelwert der Bearbeitungszeit einer Stufe gegenüber den vorhergehenden ist. Damit die Lager nicht unendlich groß werden, muß der Zugang zu einem Zustand kleiner als der Abgang sein.

---

[3] R.Henn:Stochastische Entscheidungsaufgaben bei Investition und Lagerhaltung(inR.Henn Operations Research--Verfahren I Meisenheim 1963).

Der Betrieb hat auf die Bearbeitungszeiten der einzelnen Stufen durch entsprechenden Einsatz von Produktionsmitteln und Rationalisierungsmaßnahmen Einfluß.Die angegebenen Formeln zeigen deutlich, wie sich solche Maßnahmen auf den Gesamtprozeß auswirken.

Warteschlangenprobleme der behandelten Form sind also mit den Bearbeitungszeiten der einzelnen Stufen und gegebenen Situationen auf dem Beschaffungs-und Absatzsektor als Parameter auch für die Betriebsplanung von großer Wichtigkeit.Da der Begriff des Wahrscheinlichkeitsstromes auch für die Volkswirtschaft eine große Bedeutung hat, werden sich auch hier in Zukunft viele Anwendungsmöglichkeiten ergeben, ob man nun an Geld-Güter-oder andere Ströme denkt,ob es sich nun um Ströme mit (Kreislauf)oder ohne Ringschluß handelt.

Besondere Probleme treten bei sog.geschlossenen Systemen auf, bei denen die Zahl der Einheiten endlich und fest vorgegeben ist. Das bekannteste Beispiel aus diesem Bereich ist die Wartung eines Maschinen-parks von N Maschinen durch eine Reparaturkolonne.

Sind keine Zwischenlager möglich, so verhalten sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten in den einzelnen Zuständen wie die mittleren Bearbeitungszeiten $1/\lambda_i$. Die Rationalisierung einer Stufe hat dann zur Folge, daß sich die Wahrscheinlichkeiten für die anderen Stufen entsprechend erhöhen. Die blockierten Systeme stehen in ihren Effekten zwischen beiden Extremfällen.

Besonderer Erwähnung bedürfen die Ströme der für die Produktion nötigen Hilfs-und Betriebsstoffe wie die der anfallenden Nebenprodukte. Bei den ersteren ist der Output durch den Bedarf des Produktionsprozesses vorgegeben,bei den letzteren der Input. Sollen keine Zwischenlager an

diesen Stoffen verändert werden, so sind die angegebenen Formeln über stationäre Ströme ohne Ringschluß anwendbar.

Hier ergeben sich noch viele Anwendungsmöglichkeiten, wobei ganz ähnliche Methoden wie die hier vorgetragenen anzuwenden sind. Der angegebene Formelkatalog ist auch nur ein ganz kleiner Ausschnitt aus der Fülle der Möglichkeiten.So wurde auf eine Darlegung des Problems der Prioritäten und der beschränkten Verfügbarkeit von Bearbeitungsstellen verzichtet.

2. Erzeugende Funktionen und Laplace-Transformierte.

Die wesentlichen Kenngrößen einer Warteschlange sind ihre Länge und die sog.Wartezeit,d.h.die Zeit,die von der Ankunft einer Einheit bis zum Verlassen der Schlange, wenn also die Bearbeitung oder Abfertigung dieser Einheit beginnt, vergeht.Beide Größen sind stochastische Größen, und man ist oft schon zufrieden, wenn man die ersten Momente ihrer Verteilung kennt. P(N,t) sei die Wahrscheinlichkeit,zum Zeitpunkt t N Einheiten in der Schlange vorzufinden.

Verteilung der Wartezeiten: $F(t)=\int f(t)dt$

Momente 1.Ordnung: $\sum N\,P(N,t)$, $\int f(t)t\,dt$ Erwartungsw.

Momente 2.Ordnung: $\sum N^2P(N,t)$, $\int f(t)t^2dt$ Varianzen

Diese Größen lassen sich leicht durch Differentiation aus der sog.erzeugenden Funktion

$$Q(u,t)= \sum_N P(N,t)u^N$$

bzw.der Laplace-Transformierten (L.T)

$$\mathcal{L}(F) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

gewinnen.Es gilt nämlich:

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \sum_N N P(N,t) u^{N-1}, \text{ d.h. } \left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right)_{u=1} = \sum_N N P(N,t)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial u^2} = \sum_N N(N-1) P(N,t) u^{N-2}, \text{ d.h. } \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial u^2}\right)_{u=1} + \left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right)_{u=1} = \sum_N N^2 P(N,t)$$

$$-\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L}(F) = \int_0^\infty t \cdot e^{-st} f(t) dt, \text{ d.h. } \left[\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L}(F)\right]_{s=0} = \int_0^\infty t f(t) dt$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{L}(F) = \int_0^\infty t^2 e^{-st} f(t) dt, \text{ d.h. } \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{L}(F)\right]_{s=0} = \int_0^\infty t^2 f(t) dt$$

Durch Angabe der erzeugenden Funktion und der L.T, bekommt man also wesentlich allgemeinere und auch elegantere Ausdrücke,als sie uns Erwartungswert und Varianz allein liefern können.Wir werden uns daher im zweiten Teil dieser Arbeit mit der Ermittlung der erzeugenden Funktion als Kenngröße der Schlangenlänge und dann im dritten Teil mit der L.T. als Kenngröße der Wartezeiten auseinander setzen.

TEIL B

DIE VERTEILUNG DER WARTESCHLANGEN

I. Bedingungen für einen Markoffschen Prozeß

Die Theorie der Warteschlangen stellt einen Spezialfall stochastischer Prozesse dar, wie er im einfachsten Fall bei einer Warteschlange vor einem Bahnhofsschalter vorliegt. Eine sich durch Zu-und Abgänge laufend verändernde Zahl von Kunden wartet darauf, bedient zu werden. Es wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zahl der Wartenden gesucht, wenn für die Zahl der Neuankommenden (input)und ihre Abfertigung (output) bestimmte Verteilungen vorgegeben werden. Man wird dazu noch die Information benötigen, ob die Schalter jederzeit (full availability) oder nur während bestimmter Stunden für den Kundenverkehr offen stehen. Weiter ist noch wichtig zu wissen, ob es unter den Ankommenden Präferenzen in der Bedienung gibt oder jeder wirklich der Reihe nach bedient wird.

Dieses Problem, das nicht nur für das betrachtete Bei - spiel,sondern auch für viele weitere Prozesse der Ablaufplanung äußerster Wichtigkeit besitzt, stellt sich relativ einfach für den sog.Markoffschen Fall dar. Bei diesem werden über "input" und "output" ganz bestimmte Voraussetzungen gemacht, die in diesem einleitenden Kapitel besprochen werden sollen. Für den "input" wird dabei das Modell des einfachen oder Poissonschen Stromes benutzt (s.Chintschin [1]), das den folgenden Bedingungen genügt:

1) Homogenität
   Für jedes Zeitintervall der Länge $t>0$ und ganzes $k\geq 0$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß während einer Periode der Zeit $(a,a+t)$ k Ereignisse auftreten, (z.B.Eintreffen von Kunden vor einem

---

[1] A.J.CHINTSCHIN: Mathematical Methods in the theory of queueing,London:Griffin 1960

Schalter, von Anrufen in einer Telephonzentrale und Ausfall von Maschinen, die dann auf Reparatur durch eine Bedienungskolonne warten müssen usw.), für jedes $a \geq 0$ gleich (nur von k und t abhängig). Diese Wahrscheinlichkeit sei mit $v_k(t)$ bezeichnet. In fast allen praktischen Fällen wird man annehmen können, daß während einer endlichen Zeitperiode mit der Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich viele Ereignisse auftreten können, so daß für jedes $t > 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) = 1 \qquad (1)$$

ist.

2) Abwesenheit von Nachwirkungen
Die Wahrscheinlichkeit $v_k(t)$ des Auftretens von k Ereignissen während der Periode $(a,a+t)$ hängt nicht von der Folge der Ereignisse bis zum Zeitpunkt a ab. ($a \geq 0$ beliebig).

3) Schlichtheit (engl.orderliness)
Für einen gegebenen Strom möge $\psi(t) = \sum_{k=2}^{\infty} v_k(t)$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnen, daß während einer Periode der Länge t wenigstens 2 Ereignisse auftreten. Dann soll gefordert werden:

$$\frac{\psi(t)}{t} \longrightarrow 0 \quad (t \to 0) \qquad (2)$$

Diese Bedingung bedeutet also die praktische Unmöglichkeit des Auftretens von 2 oder mehr Ereignissen im gleichen Zeitpunkt.

Es ist dann recht einfach zu zeigen, daß die Lösung ei-

nes solchen,einfachen Stromes

$$v_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad (3)$$

ist.

Das ist aber gerade die Poisson-Verteilung. λ ist dabei durch die Beziehung

$$\lambda = \lim_{t \to 0} \frac{v_1(t)}{t} \qquad (4)$$

gegeben, außerdem durch den Mittelwert $\lambda = \sum k v_k(t)/t$. Diese Möglichkeit einer doppelten Definition folgt aus der Schlichtheit.

Man beweist (3) am besten mittels der Methode der erzeugenden Funktionen.

Für kleines τ ist nach den Bedingungen 2) und 3)

$$v_0(t+\tau) = (1-\lambda\tau)\, v_0(t) + o(\tau)$$

$$v_k(t+\tau) = (1-\lambda\tau)\, v_k(t) + \lambda\tau\, v_{k-1}(t) + o(\tau) \quad (k=1,2.....)$$

und in der Grenze $\tau \longrightarrow 0$

$$v_0'(t) = -\lambda\, v_0(t)$$

$$v_k'(t) = -\lambda\, v_k(t) + \lambda\, v_{k-1}(t) \quad (k=1,2.....) \qquad (5)$$

Es wird jetzt die erzeugende Funktion

$$Q(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) s^k \qquad (6)$$

eingeführt, eine Funktion, die sicher für $|s| \leq 1$ konvergiert und für $s = 1$ gleich 1 ist.

Mit (6) schreibt sich das Gleichungssystem(5)

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(s,t) = -\lambda(1-s)\, Q(s,t) \qquad (7)$$

Dessen Lösung aber ist

$$Q(s,t) = e^{-\lambda t(1-s)} \qquad (8)$$

Daraus aber folgt für die $v_k(t)$ gerade die Beziehung (3). Von Fray (Theory of probab. for engineers,1934,[2]) ist auch der Fall eines nicht homogenen Stromes gegeben, bei dem also $\lambda = \lambda(t)$ ist.Hier folgt ebenfalls ein Poisson-Gesetz in $(t,t+\tau)$, wobei λ lediglich durch

$$\frac{\Lambda(\tau,t)}{\tau} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\lambda(t+u)\,du$$ ersetzt ist.

Auch der Fall eines homogenen Prozesses ohne Nachwirkungen ist von Chintschin behandelt und gelöst worden. In diesem Fall braucht man die Grenzwerte

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{v_k(\tau)}{\tau} = p_k \quad (k = 0,1,2.....) \qquad (9)$$

Für einen Strom ohne Nachwirkungen ist $v_k(t+\tau) = \sum_{l=0}^{k} v_l(\tau)\; v_{k-l}(t) \quad (t > 0, \tau > 0, k = 0,1.....$

Aus $v_o(t+\tau) = (1-\lambda\tau)\; v_o(t) + o(\tau)$

und $v_k(t+\tau) = (1-\lambda\tau)\; v_k(t) + \sum_{m=1}^{k} v_m(\tau)\; v_{k-m}(t) + o(\tau)$

$(k > 0) \qquad (10)$

folgt für $\tau \longrightarrow 0$

$$v_o'(t) = -\lambda v_o(t)$$

$$v_k'(t) = -\lambda v_k(t) + \lambda \sum_{m=1}^{k} p_m v_{k-m}(t) \qquad (11)$$

Mit der erzeugenden Funktion (6) wird

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\lambda Q + \lambda\sum_{k=1}^{\infty} s^k \sum_{m=1}^{k} p_m v_{k-m}(t) = -\lambda Q + \lambda\sum_{m=1}^{\infty} p_m \sum_{q=0}^{\infty} v_q(t) s^{q+m}$$

$$= -\lambda Q + \lambda\sum_{m=1}^{\infty} p_m s^m \sum_{q=0}^{\infty} v_q(t)\, s^q$$

Setzt man

$$\phi(s) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m s^m \qquad (12)$$

so wird

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \lambda [\phi(s) - 1] Q \qquad (13)$$

woraus folgt

$$\frac{\partial \log Q}{\partial t} = \lambda [\phi(s) - 1] \qquad (14)$$

Da für jedes s $Q(0,s) = v_o(0) = 1$, folgt durch Integration

$$Q(t,s) = \exp\left\{ \lambda [\phi(s) - 1] t \right\} \qquad (15)$$

Es sind damit also auch solche Ströme behandelt worden, bei denen dien Bedingungen 1) und 3) nicht gültig sind. So bleibt nur noch die problematische Voraussetzung übrig, nämlich die der fehlenden Nachwirkung.

Chintschin [3] behandelte den "input" (z.B.Strom von Anrufen in einer Telephonzentrale) als einen Zufallsprozeß X(t). X(t) ist dabei monoton und kann nur ganzzahlige Werte ≥ 0 annehmen.

Es wird angenommen, daß der 1.Anruf bei $t_o = 0$ erfolgt, $t_i (i = 1,2.....)$ die Zeit des Anrufs i (so daß $t_{i-1} \leq t_i$) und weiter $t_i - t_{i-1} = z_i (i = 1,2....)$ die Länge des Intervalls zwischen dem (i-1)-ten und i-ten Anruf sei.

Sind nun die Bedingungen 2 und 3 erfüllt, so sind die z_i unabhängige Zufallsvariable. Es gilt jedoch nicht die Umkehrung, so daß im Fall unabhängiger z_i von einem Prozeß mit beschränkter Nachwirkung gesprochen werden kann.

---

[3] A.J.CHINTSCHIN: Matematiceski Sbornik T 40,2

Chintschin [1] nannte die Ströme, die die Bedingungen 1) und 3) und die abgeänderte 2) erfüllen, Ströme vom Typ P(Palmsche Ströme, nach der klass.Arbeit von Palm 1943[4]). Es seien noch einige Gedanken auf homogene Ströme ohne Nachwirkungen verwendet.
Geht man von der Idee des homogenen Zufallsprozesses X(t) aus, so bedeutet die Erfüllung von 1) und 2), daß X (t) durch folgende Eigenschaften definiert werden kann:

Homogenität: $X(t_2)-X(t_1)$ für $t_2>t_1$ nur von t_2-t_1 abhängig

Fehlen von Nachwirkungen:für $t_1 < t_2 \ldots\ldots < t_k$ sind

$X(t_2)-X(t_1), X(t_3)-X(t_2)\ldots., X(t_k)-X(t_{k-1})$ unabhängig.

Daraus und aus $X(0) = 0$ folgt, daß X(t) in der Form

$$X(t) = \eta_1^n + \eta_2^n + \ldots\ldots + \eta_n^n$$

darstellbar ist, wobei $\eta_k^n = X\left(\frac{k}{n}t\right) - X\left(\frac{k-1}{n}t\right)$ identisch verteilte unabhängige Summanden sind. Damit erhalten wir als Ergebnis, daß nur spezielle Verteilungen für die X(t) zulässig sind, nämlich gerade die unbegrenzt teilbaren Verteilungen (s-Gnedenko-Kolmogorow [5]).
Diese erscheinen als Grenzwerte für $n \longrightarrow \infty$ von Summen $\zeta_n = \xi_{n_1} + \xi_{n_2} + \ldots\ldots + \xi_{n,m_n}$ unabhängiger Zufallsvariabler ξ_{nk}. X (t) stellt dann einen homogenen Zufallsprozeß ohne Nachwirkungen dar.

Unter diesen Zufallsprozessen nehmen die Normalverteilung und die Familie der Poisson-Verteilungen eine Sonderstellung ein.

---

[4] C. PALM: Industridningen Norden 75, 75 (1947)

[5] GNEDENKO-KOLMOGOROW: Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen (Akad.Verl.Berlin 1959)

Ein solcher Zufallsprozeß X(t) wird gerade dann und nur dann durch die Normalverteilung (hierin ist die uneigentliche Verteilung für $\sigma \longrightarrow 0$ enthalten) beherrscht, wenn für beliebiges $\varepsilon > 0$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Absolutbetrag des Zuwachses von X(t) im Intervall $(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$ $(k = 1,2.....n)$ die Größe ε übertrifft, zusammen mit $\frac{1}{n}$ gegen 0 geht.
(Forderung der gleichmäßigen Stetigkeit im wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinne).
Die Poisson-Verteilung liegt vor, wenn X(t) als Funktion von t mit der Wahrscheinlichkeit 1 eine nicht abnehmende Treppenfunktion ist, die nur solche Werte annimmt, die das Vielfache einer Schrittweite h darstellen. Sämtliche unbegrenzt teilbaren Verteilungen lassen sich dann durch die Normalverteilung und ein kontinuierliches Spektrum von Poisson-Verteilungen angeben, wobei noch eine Verteilungsfunktion F (λ) des Parameters λ gegeben sein muß. Diese hat bei Einbeziehung der Normalverteilung einen Sprung im Nullpunkt. Einzelheiten sollen hier nicht referiert werden, da sie im Folgenden nicht benutzt werden. Es sei nur auf das Buch von Gnedenko und Kolmogorow [5] verwiesen, das sich mit diesem Verteilungstyp ausführlich beschäftigt. Im vorliegenden Fall kann sich der "input" nur diskontinuierlich ändern, nämlich dadurch, daß im schlichten Fall einer, im nicht-schlichten Fall mehrer Einheiten eintreffen.

---

[6] A.DOIG: Bibliography on the Theory of Queues (Biometrica 44, 490(1957))

[7] F.BENSON: D.R.COX: The Productivity of Machines Requiring Attention at Random Intervals. J.R.Statist. Soc. B 13, 65 (1951)

In diesem Fall sind nur die Poisson-Verteilungen zur Konkurenz zugelassen und von diesen auch nur solche, deren Parameter das Vielfache einer Einheitsgröße λ sind. Das reduziert die allgemeine Lösung aber gerade auf den Fall eines homogenen Stromes ohne Nachwirkungen. Im Fall eines einfachen Stromes ist durch die Schlichtheitsbedingung 3) nur ein Parameter zugelassen, so daß man auch nur eine einzige Poisson-Verteilung erhält.
Es ist abschließend zum "input" zu bemerken, daß als die problematischste Annahme die Hypothese der fehlenden oder beschränkten Nachwirkung erscheint. Für den Telephon-und vielleicht auch für den normalen Schalterverkehr ist sie gerechtfertigt - wie viele Arbeiten aus der Praxis über dieses Gebiet gezeigt haben, [6] - jedoch nicht für den Ausfall von Maschinen aus einem festen endlichen Reservoir. Benson und Cox [7] haben gezeigt, daß in der Textilundustrie das Reißen eines Fadens bei Spinnmaschinen von so vielen Faktoren abhängt, daß wir es dabei praktisch mit unabhängigen Ereignissen zu tun haben. Ist allerdings die Zahl solcher Faktoren beschränkt und die Zahl der Maschinen entsprechend klein, so wird diese Annahme nur noch beschränkt gültig sein.

Output:

Will man die Annahme der fehlenden Nachwirkung auch für die Bedienungszeiten beibehalten, so heißt das, daß in jedem beliebigen Zeitpunkt die restliche Bedienungszeit nicht davon abhängen darf, wie lange diese schon gedauert hat. Diese Eigenschaft besitzt aber nur die Exponentialverteilung, die auch in allen bisherigen Anwendungen gemacht wurde. Chintschin [1] selbst meint, daß fast jedes andere Verteilungsgesetz für die Bedienungszeiten zu unüberwindlichen mathematischen Schwierigkeiten führt.

Der Gesamtprozeß

Betrachtet man nun den Gesamtprozeß mit "input" und "output" so hängt - die Zahl $X(t_o)$ sei vorgegeben - der weitere Verlauf $X(t)$ $(t > t_o)$ von folgenden Faktoren ab:

1) den restlichen Bedienungszeiten solcher Einheiten, die zum Zeitpunkt t_o gerade abgefertigt werden,
2) den Zeitpunkten des Eintretens neuer Einheiten in das System
3) den Bedienungszeiten für die neuen Einheiten aus 2)

Nur im Fall exponentieller Bedienungszeiten und eines "input" ohne Nachwirkungen (d.h.Exponentialverteilung für die Ankunfts-Zeitdifferenz (A.Z.)) ist der Verlauf des Prozesses nach t_o, soweit er Wahrscheinlichkeiten betrifft, nicht von dem Verlauf bis t_o abhängig.+ Man sagt dann, $X(t)$ beschreibe einen Markoffschen Prozeß. [8]

+ Die Bedienung "beschränkte Nachwirkung" reicht nicht aus, da man außerdem die A.Z. zweier Einheiten in beliebige unabhängige Abschnitte aufteilen muß.

---

[8] E.B. DYNKLIN: Die Grundlagen der Theorie der Markoffschen Prozesse. Springer Berlin-Göttingen Heidelberg 1961

II. Methoden zur Reduktion auf den Markoffschen Fall

Nach dem vorhergehenden Kapitel scheint der Gültigkeitsbereich der Markoffschen Prozesse nur recht gering zu sein. Man kann jedoch Methoden angeben, mit denen sich Prozesse auf den Markoffschen Fall reduzieren lassen, deren Ankunfts-Zeitdifferenz (A.Z.) und Bedienungszeit (B.Z.) nicht exponentiell verteilt sind. Es ist speziell an die schon von Erlang [9,10] (s.auch Cox [11] Kap.V.) stammende Stufenmethode sowie eine geeignete monotone Abbildung der Zeitachse zu denken. Beide sollen kurz besprochen werden. Anschließend sei ihre Anwendung auf die wohl wichtigsten Verteilungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik, nämlich der Familie der Pearsonkurven, erörtert.

1. Die Stufenmethode

Die gerade erwähnte Stufenmethode läßt sich auf jeden Prozeß anwenden, dessen A.Z. und B.Z. rationale L.T. der Form $\frac{P_n(s)}{P_m(s)}$ haben, wo $P_n(s)$ bzw. $P_m(s)$ Polynome vom Grade n bzw. m ($n < m$), beide mit nur negativen Wurzeln, sein sollen.
In einem solchen Fall kann man eine Partialbruchzerlegung durchführen, so daß

$$\text{L.T.} = \frac{P_n(s)}{P_m(s)} = N \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{k_i} \frac{a_{i,r}}{(s+\lambda_i)^r} \qquad (a_{i,r}, \lambda_i > 0) \tag{16}$$

---

[9] A.K.ERLANG (1878-1929)

[10] E.BROCKMEYER,H.HALSTRØM,A.JENSEN: The Life and Works of A.K.ERLANG,Kopenhagen 1948

[11] D.R.COX,W.L.SMITH:Queues.London:Methuen (1961)

[12] G.DOETSCH:Einführung in Theorie u.Anwendung der L.T. Birkhäuser-Verlag Basel 1958

Hier seien $-\lambda_1 \ldots\ldots -\lambda_n$ die Nullstellen des Nenners, $k_1 \ldots k_n$ ihre Vielfachheiten und die $a_{i,r}$ bestimmte Konstanten. Der Normierungsfaktor N ist so zu bestimmen, daß die $a_{i,r}$ als Wahrscheinlichkeiten definiert werden können. Man kann ihn auch weglassen, wenn man sich daran erinnert, daß für die L.T. $\mathfrak{L}(F)$ einer Funktion F gilt: $\mathfrak{L}(NF)=N\mathfrak{L}(F)$. Die Funktion kann also schon als normiert vorausgesetzt werden (was für eine Wahrscheinlichkeitsdichte sicher zutrifft).

Bekanntlich hat die Laplace-Transformation (s.etwa Doetsch [12]) einer Verteilung F(t) mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f(t)

$$\mathfrak{L}(F) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \qquad (17)$$

die Eigenschaft, daß

$$\mathfrak{L}(F_1 + F_2) = \mathfrak{L}(F_1) + \mathfrak{L}(F_2) \qquad (18a)$$

und

$$\mathfrak{L}(F_1 * F_2) = \mathfrak{L}(F_1) \cdot \mathfrak{L}(F_2) \qquad (18b)$$

wo $F_1 * F_2$ die durch "Faltung" aus F_1 und F_2 entstandene Verteilung ist. $F_1 * F_2$ beschreibt gerade die Verteilung der Summe zweier Zufallsgrößen, deren Verteilung durch F_1 bzw. F_2 gegeben sind. Das bedeutet aber für einen Bedienungsprozeß, dessen zeitliche Verteilung eine L.T-. der Form (16) hat, daß man ihn durch $m = \sum k_i$ parallel laufende Prozesse darstellen kann, deren Wahrscheinlichkeit durch die $a_{i,r}$ und deren L.T. durch $(s+\lambda_i)^{-r}$ gegeben ist. Nach dem Faltungssatz (18b) ist das aber die L.T. einer Summe von r Zufallsgrößen, die alle exponentiell mit dem Parameter λ_i verteilt sind.

$$\int_0^\infty e^{-st} \lambda_i \cdot e^{-\lambda_i t}\, dt = \frac{\lambda_i}{s+\lambda_i}$$

Diese Summe wird durch die Γ-Verteilung mit der Dichte

$\frac{\lambda_i^r \cdot t^{r-1}}{(r-1)!} \cdot e^{-\lambda_i t}$ beschrieben, denn

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{\lambda_i^r}{(r-1)!} t^{r-1} e^{-\lambda_i t} dt = \frac{\lambda_i^r}{(r-1)!} \int_0^\infty e^{-(s+\lambda_i)t} t^{r-1} dt$$

$$= \frac{\lambda_i^r}{(s+\lambda_i)^r}$$

Die gesamte Bedienungszeit einer Einheit hat dann die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{k_i} \frac{a_{i,r}}{(r-1)!} t^{r-1} e^{-\lambda_i \cdot t} \qquad (19)$$

Hierbei sind die $a_{i,r}$ sämtlich ≥ 0 und außerdem der Bedingung $\int_0^\infty f(t)\, dt = 1$ unterworfen.

Ist der Zähler $P_n(s) = \text{const.}$, also $n = 0$, die L.T. folglich das Reziproke eines Polynoms $(s+\lambda_1)^{k_1} \ldots (s+\lambda_n)^{k_n}$, so ist die B.Z. Summe von m Zufallsgrößen. Sie ergibt sich ganz einfach zu:

$$\text{B.Z.} = \sum_{i=1}^{m} e^{-\lambda_i t} \lambda_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \qquad (19a)$$

Da der Nenner sowohl positiv als auch negativ sein kann, bedeutet diese Formel die Verallgemeinerung auf negative $a_{i,r}$. Im Falle äquidistant liegender λ_i wird Gl.(19a) besonders einfach. Man erhält

$$\text{B.Z.} = \frac{e^{-\lambda_1 t}}{m! \cdot \Delta^m} (1 - e^{-\Delta t})^m$$

Dabei sind die λ_i der Größe nach geordnet, also $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots\ldots < \lambda_m$, ferner $\Delta = \lambda_i - \lambda_{i-1}$.

Dieser Ausdruck geht für $\Delta \longrightarrow 0$ (in Worten: Δ geht gegen 0) die Gammaverteilung

$$\text{B.Z.} = \frac{e^{-\lambda t}}{m!} t^m$$

über. Entsprechend findet man durch Grenzübergang auch den Fall, wo unter den λ_i gleiche Werte vorkommen. In

diesem Fall sind Grenzübergänge:

$$\lim_{\lambda_i \to \lambda_j} \frac{e^{-\lambda_j t} - e^{-\lambda_i t}}{\lambda_i - \lambda_j} = te^{-\lambda_i t}$$

zu betrachten, da jedes Wertepaar i,j doppelt auftritt. Im Fall von Mehrfachwurzeln λ_i ist natürlich jeder Abstand von den anderen Wurzeln nach der Vielfachheit zu zählen, z.B. bei einer Dreifachwurzel λ_1 und einer einfachen Wurzel λ_4:

$$B.Z. = \frac{\lambda_1^3 \lambda_4 e^{-\lambda_1 t}}{2!(\lambda_4 - \lambda_1)} t^2 + \frac{\lambda_1^3 \lambda_4 e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_1 - \lambda_4)^3}$$

Entsprechend findet man auch die Verallgemeinerung auf beliebig viele Mehrfachwurzeln. Habe etwa λ_1 die Vielfachheit k_1, λ_2 die Vielfachheit k_2,.....,λ_r die Vielfachheit k_r. Die B.Z. lautet dann

$$B.Z. = \frac{\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\ldots\lambda_r^{k_r} e^{-\lambda_1 t} t^{k_1-1}}{(\lambda_2-\lambda_1)^{k_2}\ldots(\lambda_r-\lambda_1)^{k_r}(k_1-1)!} + \frac{\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\ldots\lambda_r^{k_r} e^{-\lambda_2 t} t^{k_2-1}}{(\lambda_1-\lambda_2)^{k_1}\ldots(\lambda_r-\lambda_2)^{k_r}(k_2-1)!}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots + \frac{\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\ldots\lambda_r^{k_r} e^{-\lambda_r t} t^{k_r-1}}{(\lambda_1-\lambda_r)^{k_1}\ldots(\lambda_{r-1}-\lambda_r)^{k_{r-1}}(k_r-1)!}$$

Es ist leicht zu sehen, daß man so auch den Fall, wo in der Partialbruchzerlegung $a_{i,r} < 0$ vorkommen, erfassen kann. Das gilt allerdings nur insofern, als die auftretenden Wahrscheinlichkeitsdichten für die B.Z. ≥ 0 für jedes t bleiben.

Man kann nun diese Überlegungen auch auf die Ankunft eines Objekts übertragen, indem man einen ganz analogen Ankunftsprozeß definiert, der etwa im Zeitpunkt der wirklichen Ankunft des vorhergehenden Objekts beginnt und im Zeitpunkt der wirklichen Ankunft des betreffenden Objekts endet,also gerade die Ankunfts-Zeitdifferenz (A.Z) erfaßt.

Man kann damit jedoch noch Prozesse mit erheblich weiter gefaßten Voraussetzungen über die A.Z. erfassen, indem

man etwa den Ankunftsprozeß beim vorletzten Objekt beginnen läßt. In diesen Fällen befindet sich dann allerdings mehr als 1 Objekt im "Ankunftssystem".

Somit wurde ein allgemeineres System mit erheblich weiteren Voraussetzungen betreffs der A.Z. und B.Z. in eine Summe parallel laufender Markoff-Prozesse aufgelöst. Es muß allerdings bei der Vorgabe des Systems in einem Zeitpunkt t_o von jedem Objekt angegeben werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit in welcher Stufe des Ankunfts-bzw.Bedienungsprozesses es sich befindet (bzw.an welcher Stelle einer evtl. Warteschlange).

2. Abbildung der Zeitachse

Als zweite Möglichkeit der Reduktion auf den Markoffschen Fall wäre eine eventuelle Abbildung der Zeit, nämlich von der bisherigen t-Achse auf eine geeignet gewählte τ-Achse, zu nennen. Dadurch kann erreicht werden, daß im τ-System ein Markoffscher Prozeß vorliegt, obwohl das für das t-System nicht der Fall ist.Es ist jedoch zu betonen, daß diese Methode allein nur dann zum Ziel führt, wenn An - kunfts-Zeitdifferenz und Bedienungszeit mit Wahrscheinlichkeitsdichten gleichen Typs und gleichen Definitionsbereichs verteilt sind. Bei allgemeineren Verteilungen führt dagegen oft die Anwendung beider in diesem Kapitel beschriebenen Methoden zum Ziel.
Gilt für die Wahrscheinlichkeitsdichte f(t) einer Verteilung F(t) die Beziehung $f(t) > 0 \quad (t \geq 0)$ (20)
im genannten Definitionsbereich $c_1 < t < c_2$, so ist
$F(c_1) = 0$, $F(c_2) = 1$, ferner $F(t_1) < F(t_2)$ für

$$c_1 < t_1 < t_2 < c_2$$

Es wird dann eine Zeittransformation derart durchgeführt,

daß $$F(t) = 1 - e^{-\lambda\tau} \quad (t \geq c_1) \tag{21}$$

also $$\tau = \frac{-1}{\lambda} \ln \left[1 - F(t) \right] \tag{22}$$

($\lambda > 0$ bleibt dabei als noch freier Parameter)
Eine solche Funktion $\tau(t)$ hat sicher überall in $c_1 < t < c_2$ eine positive Ableitung $d\tau/dt$, d.h. die Transformation ist im eigentlichen Sinne monoton, sie überstreicht ferner den gesamten Bereich $0 \leq \tau < \infty$ .Durch sie wird die Verteilungsfunktion F(t) in eine Exponentialverteilung überführt. Oft ist diese Abbildung der Zeitachse allein sehr schwierig, so daß man sich mit einfacheren Abbildungen, die dann nicht auf die Exponentialverteilung führen, zufrieden geben und dann die Stufenmethode anwenden wird.

III. Anwendung auf die Pearson-Kurven

Als Anwendungsbeispiel für die in Kapitel II behandelten Methoden sei die Familie der Pearson-Kurven [13] behandelt. Leider gibt es nur wenige Bücher, die diese in geschlossener Form bringen. Eins davon ist das Buch von Jeffreys [14]. In Anlehnung an diesen Autor soll daher zunächst einmal eine Systematik dieser Verteilungen versucht werden, bevor dann auf die Anwendung selbst eingegangen wird.

1. Systematik der Pearson-Kurven

Die Dichte einer Normalverteilung $y = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{t-\lambda}{\sigma^2}\right]$ stellt die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = -\frac{t-\lambda}{\sigma^2} \quad \text{dar.} \tag{23}$$

Führt man noch zwei weitere Parameter ein, so erhält man als Verallgemeinerung der Normalverteilung die Differentialgleichung für die Familie der Pearson-Kurven:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -\frac{t-a}{b_0 + b_1 \cdot t + b_2 t^2} \qquad (24)$$

Im Nenner steht ein Polynom zweiten Grades, das nach dem Hauptsatz der Algebra auch als $(x-c_1)(x-c_2)$ geschrieben werden kann. Auf der rechten Seite von (24) kann eine Partialbruchzerlegung durchgeführt werden. Man erhält:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{m_1}{t-c_1} + \frac{m_2}{t-c_2} \qquad (25)$$

oder im Falle einer Doppelwurzel

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{-\alpha}{t-c} + \frac{\beta}{(t-c)^2} \qquad (26)$$

Es ist leicht nachzuprüfen, daß m_1, m_2, c_1, c_2 mit a, b_0, b_1, b_2 wie folgt zusammenhängen:

$$c_1 = \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_0 b_2}}{2b_0} \qquad m_1 = \frac{c_1 - a}{b_2(c_2 - c_1)}$$

$$c_2 = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_0 b_2}}{2b_2} \qquad m_2 = \frac{a - c_2}{b_2(c_2 - c_1)} \qquad (27)$$

und im Fall der Doppelwurzel, also $b_1^2 = 4b_0 b_2$

$$\alpha = \frac{1}{b_2}\,, \quad c = -\frac{b_1}{2b_2}\,, \quad \beta = \frac{2ab_2 + b_1}{2b_2^2} \qquad (28)$$

Das Vorzeichen in c_1, c_2 ist dabei so gewählt, daß $c_1 < c_2$ ist, falls die Diskriminante $b_1^2 - 4b_0 b_2 > 0$ ausfällt.

|13| K.PEARSON: Tables of the incomplete Γ-and B-Fct.Biometrica 1934

|14| H.JEFFREYS: Theory of Probability. Oxford 1961

Ist $b_1^2 - 4b_0b_2 < 0$, so erhält man zwei konjugiert komplexe Lösungen. Dieser Fall sei zuerst untersucht. Er führt auf den Pearson-Typ IV.

a) Typ IV

$$c_1 = \lambda + i\beta, \quad c_2 = \lambda - i\beta$$

dann müßten nach Gl.(25) auch m_1 und m_2 konjugiert komplex sein ($\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$ sicher reell), also $m_1 = -m+iq$, $m_2 = -m-iq$
Es ist dann:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = 2\,\frac{-m(t-\lambda)+q}{(t-\lambda)^2+\beta^2} \qquad (29)$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2\,\frac{-mx+q}{x^2+1} \quad \text{mit } x = \frac{t-\lambda}{\beta} \qquad (30)$$

Der Nenner ist offenbar stets ≥ 1, so daß y für keinen reellen Wert von t verschwindet (außer bei $\pm\infty$), noch ∞ werden kann. Zugelassen ist also für t die gesamte Zahlengerade von $-\infty$ bis $+\infty$ mit einem Maximum von y an einem Zwischenwert (für $x = \frac{q}{m}$). Aus (30) folgt also:

$$y = A\,(x^2+1)^{-m}\exp(2q\,\operatorname{arctg} x) \qquad (31)$$

Die Integrationskonstante leitet sich aus der Normierungsbedingung $\int_{-\infty}^{\infty} y\,dx = 1$ her.

α) Typ VII:

Spezialfall vom Typ IV für $q = 0, m > 0$. Symmetrisch in x.

$$y = A\,(x^2+1)^{-m} \qquad (32)$$

Der Normierungsfaktor A folgt aus

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} A(x^2+1)^{-m}\,dx = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (tg^2\varphi+1)^{-m+1}\,d\varphi \quad \text{zu} \quad A = (2\beta)^{2m-1}\,\frac{\Gamma(m)\Gamma(m)}{\Gamma(2m-1)}\,\frac{1}{2\pi}$$

Man sieht auch leicht, daß im Typ VII die Momente k-ter Ordnung mit $k < 2m-2$ endlich sind, da dann

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^k}{(x^2+1)^m}\,dx = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin^k\varphi \cos^{2m-2-k}\varphi\,d\varphi$$

einen endlichen Wert ergibt.
Für $m = \frac{n}{2}$, $\lambda = 0, \beta = \sqrt{n-1}$ erhält man die Student'sche t-Ver-teilung, $f_t(x) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}(1+\frac{x^2}{n-1})^{-\frac{n}{2}}$, für n=2 die Cauchyverteilung $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$
Hier wurde statt t x als Variable benutzt, um Verwechslungen zu vermeiden.
Sind c_1, c_2 reell, so hat der Ausdruck (2) bei c_1 und c_2 Singularitäten. Die Lösung der Differentialgleichung ist allerdings nur anwendbar in Bereichen ohne Singularitäten. Wir müssen demnach $t<c_1$, $c_1<t<c_2, c_2<t$ unterscheiden. Davon können der erste und dritte Fall durch einfache Transformation ineinander überführt werden. Ist nämlich $t<c_1$, so ist $\tau = c_1+c_2-t > c_2$.

b) Typ I:

Im Bereich $c_1<t<c_2$ ist $y = A(t-c_1)^{m_1}(c_2-t)^{m_2}$. A ergibt sich durch
$1 = \int_{c_1}^{c_2} y\,dt = A\int(t-c_1)^{m_1}(t-c_2)^{m_2}dt = \frac{A}{(c_2-c_1)^{m_1-m_2-1}}\int_0^1 x^{m_1}(1-x)^{m_2}dx$
mit $x = \frac{t-c_1}{c_2-c_1}$. Dieses Integral stellt aber gerade die Beta-Funktion dar:

$$B(m_1+1, m_2+1) = \frac{\Gamma(m_1+1)\Gamma(m_2+1)}{\Gamma(m_1+m_2+2)}$$

also $y = \frac{(t-c_1)^{m_1}(c_2-t)^{m_2}}{B(m_1+1, m_2+1)\cdot(c_2-c_1)^{m_1+m_2+1}}$

Damit dieser Ausdruck endlich bleibt, muß $m_1>-1, m_2>-1$ sein. Je nachdem, wie groß m_1 und m_2 sind, ergeben sich verschiedene Kurvenformen:
$m_1>0, m_2>0$: $y=0$ für $t=c_1, c_2$, Maximum bei $t = \frac{m_1c_1+m_2c_2}{m_1+m_2}$
die Kurve ist glockenförmig ∩

$0>m_1>-1, 0>m_2>-1$: $y=\infty$ für $t=c_1,c_2$, Minimum bei

$$t=\frac{m_1c_1+m_2c_2}{m_1+m_2}\text{, Kurve } \cup\text{-förmig}$$

$m_1>0$, $0>m_2>-1$: $y=0$ für $t=c_1$, $y=\infty$ für $t=c_2$, $\frac{dy}{dt}>0$ in (c_1,c_2) $\rfloor$-förmig

$0>m_1>-1$, $m_2>0$: $y=\infty$ für $t=c_1$, $y=0$ für $t=c_2$, $\frac{dy}{dt}<0$ in (c_1,c_2) $\lfloor$-förmig

Diese Verteilung ist die Beta-Verteilung.

α) Typ II

Spezialfall für $m_1=m_2=m$

$$y(t)=\frac{(t-c_1)^m(c_2-t)^m}{B(m+1,m+1)(c_2-c_1)^{2m+1}}$$ als symmetrische Verteilung.

Ist $m=0$, liegt eine Rechteckverteilung vor, also

$$y=\begin{cases}\frac{1}{c_2-c_1} & \text{in } c_1\leq t<c_2\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Ist $m=1$, liegt eine parabolische Verteilung vor

$$y(t)=\begin{cases}\frac{6}{(c_2-c_1)^3}(t-c_1)\cdot(c_2-t) & \text{in } c_1\leq t<c_2\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

oder $$y(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}(1-x^2) & \text{in } -1\leq x<1, x=\frac{t-(c_1+c_2)/2}{(c_2-c_1)/2}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

β Typ IX:

Spezialfall vom Typ I für $m_1=0$

$$y = \frac{m_2+1}{c_2-c_1} \cdot \left\{ \frac{c_2-t}{c_2-c_1} \right\}^{m_2}$$

Für $t = c_1$ ist $y = \frac{m_2+1}{c_2-c_1}$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{c_1} = -\frac{m_2(m_2+1)}{(c_2-c_1)^2}$

Für $t = c_2$ ist $y = 0$ $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{c_2} = 0 (m_2>1)$

$= -\infty \ (m_2<1)$

γ) Typ XII:

Spezialfall vom Tap I für $m_1 = -m_2$

Damit die Verteilung normierbar bleibt, muß $-1<m<+1$ sein.

$$y = \left\{\frac{c_2-t}{t-c_1}\right\}^m \cdot \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(1-m)(c_2-c_1)} = \left\{\frac{c_2-t}{t-c_1}\right\}^m \frac{\sin(\pi \cdot m)}{\pi m(c_2-c_1)}$$

c) Typ VI:

Den Typ I definierten wir nach der Lage der t-Werte zwischen den Nullstellen c_1 und c_2. Es bleibt noch der Fall, daß die Argumente $t > c_2$ sind. Das führt uns auf den Pearson-Typ VI. Man gehe dazu von dem Gesetz des Typs I aus. Jetzt ist jedoch c_2-t negativ. Es sei daher der Faktor $(-1)^{m_2}$ herausgezogen und in die Beta-Funktion genommen. Dann ergibt sich

$$y = \frac{(t-c_1)^{m_1}(t-c_2)^{m_2}}{B(m_2+1, m_1-m_2-1)}$$ mit $m_1+m_2 <-1$, $m_2 >-1$ aus Normierbarkeitsgründen. Für $m_2>0$ ist $y(c_2) = 0$, $y(t) \to 0$ für $t \to \infty$, also die Funktion $\cap$-förmig. Für $m_2<0$ ist $y(c_2) = \infty$, $y(t) \to 0$ für $t \to \infty$, also die Funktion $\cup$-förmig. Wählt man ν_1, ν_2 und die Variable x so, daß

$$\frac{\nu_1}{\nu_2}x = \frac{t - c_2}{c_2 - c_1}, \quad m_1 = -\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}, \quad m_2 = \frac{\nu_1}{2} - 1$$

so ergibt sich die aus der Statistik bekannte F-Verteilung:

$$f_F(x)\begin{cases}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2} \frac{x^{(\nu_1/2)-1}(1+\nu_1 x/\nu_2)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}}{B(\nu_1/2, \nu_2/2)} & \text{in } 0 < y < \infty \\ 0 \text{ sonst}\end{cases}$$

α) Typ VIII, Typ XI:

Spezialfälle des Typs VI für $m_2 = 0$

$$y = \frac{-(m_1+1)}{(c_2-c_1)^{m_1+1}}(t-c_1)^{m_1} \qquad (t>c_2, m_1<-1)$$

Damit sind die Hauptfälle der Pearsonkurven abgeschlossen. Diese Klassifizierung nach der Lage der Argumente betreffs der Nullstellen des Nenners, die auf Jeffreys zurückgeht, erscheint erheblich eleganter als die ursprüngliche von K.Pearson. Die vorliegende ist nämlich von der speziellen Wahl des Koordinatenursprungs unabhängig.

d) Übergangstypen:

In den 3 Haupttypen IV, I, VI kommen jeweils 4 unabhängige Parameter vor, wie ja auch in der ursprünglichen Differentialgleichung. Es konnten dann durch spezielle Wahl der einzelnen Parameter weitere Typen gefunden werden, jeweils mit 3 Parametern. Andere Typen, nämlich die Typen III und V sowie die Normalverteilung, bilden den Übergang zwischen den bisher genannten Hauptfällen.

α) Typ III:

Übergang zwischen I und VI.

Aus Typ I: $c_1 \to -\infty$, $\frac{m_1}{t-c_1} \longrightarrow -\alpha\,(\alpha > 0)$ ↘

$y = A\,(t-c_2)^{m_2} \cdot \exp(-\alpha x)$

Aus Typ VI: $c_2 \longrightarrow \infty$, $-\frac{m_2}{c_2-t} \longrightarrow -\alpha\,(\alpha > 0)$ ↘

$y = A\,(t-c_1)^{m_1} \cdot \exp(-\alpha x)$

Setzt man $t-c_1 = x$, so ergibt sich die Damma-Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{\alpha^{m_2+1}}{(m_2+1)}\, x^{m_2}\, e^{-\alpha x}$$

die gerade in der Theorie der Stufenprozesse eine so eminent wichtige Rolle spielt.

Für $\alpha = \frac{1}{2}$, $m = \frac{\nu}{2} - 1$

erhält man die χ^2-Verteilung mit ν Freiheitsgraden

$$f_{\chi^2_\nu}(x) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)}\, y^{\frac{\nu}{2}-1}\, e^{-\nu/2}$$

ß) Typ X:

Spezialfall von Typ III für $m = 0$. Es ist dies gerade die so wichtige Exponentialverteilung $y = \alpha e^{-\alpha x}$

γ) Typ V:

Übergang zwischen Typ IV und Typ VI.
In Typ IV war $c_1 = \lambda + i\beta$, $c_2 = \lambda - i\beta$, in Typ VI c_1, c_2 reell. D.h. also, der Übergang zwischen beiden wird gerade durch den eingangs betrachteten Fall einer Doppelwurzel gegeben.

Aus $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{\alpha}{t-c} + \frac{\beta}{(t-c)^2}$ folgt

$$y = (t-c)^{\alpha} \exp\left(-\frac{\beta}{t-c}\right) \cdot A$$

Diese Verteilung erhält man gerade bei der Irrfahrt eines Punktes auf einer Geraden.
Um Konvergenz bei ∞ zu erreichen, muß $\alpha > 1$ sein. Für Konvergenz bei c $\beta > 0$ für jedes $\alpha > 1$. Außerdem ist $y=0$ für $x=c$. Die Kurve ist also $\cap$- förmig. Typ V unterscheidet sich von III in der Vertauschung der beiden Konvergenztypen. Tatsächlich transformiert die Vertauschung der beiden Größen $(t-c)$ und $(t-c)^{-1}$ eins ins andere. Das bedeutet jedoch eine Umkehrung der Zeitrichtung.

δ) Normalverteilung

Der Übergang vom Typ IV nach Typ I erfordert, daß die Wurzeln $\pm \infty$ sind. Dann verschwinden aber b_1 und b_2 in Gl.(24), es liegt also wieder eine Normalverteilung vor.

2. Anwendung der Stufenmethode

Die Pearsonkurven waren durch die gemeinsame Gleichung (24) für ihre Dichtefunktion gegeben .Der allgemeine Ansatz (19) möge in (24) eingesetzt und das Ganze nach den voneinander verschiedenen $e^{-\lambda_i t}$ geordnet werden. Die sich ergebende Beziehung ist jedoch nur dann für alle t aus einem fest vorgegebenen Definitionsbereich bei endlichen Zahlen n und k_i erfüllt, wenn die Koeffizientenfunktionen der $e^{-\lambda_i t}$ sämtlich verschwinden. Das löst die eine Gleichung in genau n Gleichungen auf. Für diese läßt sich dann ein ähnlicher Schluß ziehen: Sie sind für alle t nur dann erfüllt, wenn alle Koeffizienten der t^r verschwinden.Damit zerfällt die ursprüngliche Gleichung

in ein lineares homogenes Gleichungssystem für die $a_{i,r}$ oder genauer für die $\frac{a_{i,r}}{(r-1)!}$:

$$a_{i,1}(a+\lambda_i b_o) - a_{i,2}b_o = 0$$

$$-a_{i,1}(1-\lambda_i b_1) + a_{i,2}(a+\lambda_i b_o) - a_{i,3}b_o = 0 \qquad (-b_1)$$

$$\frac{a_{i,r-1}}{(r-2)!}\lambda_i b_2 - \frac{a_{i,r}}{(r-1)!}[1-\lambda_i b_1-(r-1)b_2] + \frac{a_{i,r+1}}{r!}[a+\lambda_i b_o - rb_1] - \frac{a_{i,r+2}}{r!}b_o = 0$$

$$(2 \le r \le k_i-2)$$

$$\frac{a_{i,k_i-2}}{(k_i-3)!}\lambda_i b_2 - \frac{a_{i,k_i-1}}{(k_i-2)!}[1-\lambda_i b_1-(k_i-2)b_2] + \frac{a_{i,k_i}}{(k_i-1)!}[a+\lambda_i b_o-(k_i-1)b_1] = 0 \qquad (33)$$

$$\frac{a_{i,k_i-1}}{(k_i-2)!}\lambda_i b_2 - \frac{a_{i,k_i}}{(k_i-1)!}[1-\lambda_i b_1-(k_i-1)b_2] = 0$$

$$\frac{a_{i,k_i}}{(k_i-1)!}\lambda_i b_2 = 0$$

Damit eine nicht-triviale Lösung vorliegt, muß die Systemdeterminante verschwinden. Das bedeutet eine Beschränkung der Werte λ_i bzw. b_o, b_1, b_2.

Ist $\lambda_i b_2 \neq 0$, so folgt sukzessiv, mit a_{i,k_i} begonnen, daß alle $a_{i,r} = 0$ sind.

Ist $\lambda_i b_2 = 0$, so liefert die letzte Gleichung keine Aussage. k_i war jedoch als Vielfachheit der Wurzel λ_i in Gl.(16) definiert worden, d.h. $a_{i,k_i} \neq 0$. Dann folgt aber aus der vorletzten Gleichung, daß

$1 - \lambda_i b_1 + (k_i - 1) b_2 = 0$ ist.
Läßt man im Gleichungssystem (33) die erste Gleichung aus, so ist die verbleibende Koeffizienten-Matrix eine Dreieckmatrix, deren Determinante sich als Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen ergibt, also:

$$(-1)^{k_i}(1 - \lambda_i b_1)(1 - \lambda_i b_1 + b_2) \ldots [1 - \lambda_i b_1 + (k_i - 1) b_2]$$

Dieser Ausdruck ist wegen des letzten Faktors gleich Null, d.h. es existiert eine nicht triviale Lösung. Man kann aber a_{i,k_i} frei wählen und betrachtet das dadurch enstehende inhomogene Gleichungssystem in den übrigen Unbekannten. Die Cramersche Regel führt hier zum Ziel.

$\lambda_i b_2 = 0$ kann dadurch erreicht werden, daß entweder b_2 oder $\lambda_i = 0$ ist. Der zweite Fall ist für die Anwendung der Stufenmethode uninteressant, so daß nur der Fall $b_2 = 0$ übrigbleibt.

Dann ist $\lambda_i b_1 = 1$, ferner $a + b_o \cdot \lambda_i = (k_i - 1) b_1$.

Unter Berücksichtigung der ersten, noch nicht benutzten Gleichung des Systems (33) ergibt sich nach einigen Umrechnungen

$$y = A \left\{ \frac{b_o}{b_1} + t \right\}^{k_i - 1} e^{-t/b_1} \qquad (34)$$

d.h. eine Gamma-Verteilung mit verschobenem Nullpunkt,. Damit $y > 0$ garantiert ist, muß $b_o/b_1 \geq 0$ sein.
Daß Gl.(34) die allgemeine Lösung für den Fall $b_2 = 0$ ist, ersieht man auch direkt durch Lösung der Differential-Gleichung (24), wobei $k_i - 1 = (a/b_1) + (b_o/b_1^2)$ zu beachten ist.
Für unendliche viele $a_{i,r}$ ist die Stufenmethode oft eine brauchbare Näherung, natürlich nur insoweit, als sich eine transzendente Funktion durch ein Polynom approxi-

mieren läßt.

3. Abbildung der Zeitachse

Die einfachste Transformation einer Zeitachse ist die lineare Abbildung $\tau = \alpha(t - c)$. Durch sie wird der Pearson Typ III mit $m > 0$ ganzzahlig auf einen solchen mit $c = 0, \alpha = 1$ reduziert, wie bei der Besprechung des Typs III bereits angemerkt.
Ist eine Verteilung in der Form

$$y(t) = A \cdot \varphi'(t) \exp(-\varphi(t))$$

darstellbar, so führt die Abbildung $\varphi(t) = \tau$ zum Ziel, wenn nur $\varphi'(t) \geq 0$ für alle t und $\varphi(o) = 0, \varphi(\infty) = \infty$ ist. Die Normalverteilung fiele in diese Rubrik nicht, jedoch

$$y(t) = A.t. \exp(-\alpha t^2)$$

Ebenso läßt sich

$$y(t) = A\,[\varphi(t)]^m \varphi'(t) \exp(-\varphi(t))$$

auf die Gamma-Verteilung reduzieren.

Ist $\varphi(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i$ ein Polynom vom Grade n in t, so folgt aus der Forderung $\varphi(t) > 0$ in $0 < t < \infty$, daß auf dieser Halbgraden keine Nullstellen vorliegen können, die α_i also sämtlich ≥ 0 sein müssen. Dann ist aber erst recht $\varphi'(t) > 0$.
Für die Anwendung erheblich wichtiger ist aber der Fall, wo $\tau(t)$ durch transzendente Funktionen beschrieben wird.

a) Exponentialansatz für $\tau(t)$

Rechteckverteilung:
Sie war gegeben durch

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c_2 - c_1} & \text{für } c_1 \leq t < c_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Macht man den Ansatz

$$t = c_2 - (c_2 - c_1)\, e^{-\tau} \qquad (36)$$

so ist überall

$$\frac{dt}{d\tau} = (c_2 - c_1)e^{-\tau} > 0, \quad \tau(c_1) = 0, \tau(c_2) = \infty$$

$$y(\tau) = e^{-\tau}$$

Die Rechteckverteilung wurde also auf die Exponentialverteilung zurückgeführt.

Parabolische Verteilung

Mit dem gleichen Ansatz (36) findet man $y(\tau) = 6e^{-2\tau} - 6e^{-3\tau}$ als Differenz zweier Exponentialverteilungen mit verschiedenen Parametern (Hintereinander-Ausführung zweier Stufen mit $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$). Beide Verteilungen gehören zum Pearson-Typ II, der wiederum ein Sonderfall des Typs I ist.

Typ I:

Man kann nun direkt mit dem Ansatz (36) in die Gleichung des Typs I, die Beta-Verteilung, hineingehen und findet

$$y(\tau) = \frac{e^{-(m_2+1)\tau}\,(1-e^{-\tau})^{m_1}}{B(m_1+1,\, m_2+1)}$$

Das ist aber eine endliche Summe von Exponentialfunktionen nur dann, wenn m_1 eine natürliche Zahl ist, so daß für den zweiten Faktor eine endliche Binominalentwicklung angesetzt werden kann.

(m_1 Stufen mit $\lambda_1 = m_2 + 1, \ldots\ldots \lambda_{m_1} = m_2 + m_1$. Vgl. Fließband!)

Als Spezialfälle folgen für den Typ II

$$y(\tau) = \frac{e^{-(m+1)\tau}(1 - e^{-\tau})^m}{B(m+1, m+1)}$$

und für den Typ IX

$$y(\tau) = (m+1)e^{-(m+1)\tau}$$

Typ VI:

Abbildung: $$\frac{t - c_1}{c_2 - c_1} = e^{\tau} \qquad (37)$$

$$y(\tau) = \frac{e^{(m_1+1)\tau}(e^{\tau} - 1)^{m_2}}{B(-m_1-m_2-2, m_2+1)}$$

Ist m_2 eine natürliche Zahl, so ist dieser Ausdruck wieder durch eine endliche Zahl von Exponential-Verteilungen darstellbar.

Für $m_2 = 0$ (Typ VIII, Typ XI) ergibt sich eine einzige Exponential-Verteilung. Mit diesem Ansatz (37) läßt sich auch eine Verteilung der Form

$$y(t) = A(t-c_1)^{m_1}(t-c_2)^{m_2} \ldots\ldots(t-c_k)^{m_k} \qquad (38)$$

mit natürlichen Zahlen $m_2, m_3 \ldots\ldots m_k$ auf eine Summe von Exponentialfunktionen reduzieren, wenn der Definitionsbereich von t $c_k < t < \infty$ ist und $c_1 < c_2 < \ldots\ldots < c_k$ ist. Es kann damit z.B. durch die einfache Transformation(37) ein Prozeß behandelt werden, bei dem die Anfangs-

Zeitdifferenz durch eine Verteilung des Typs (38), dessen Bedienungszeit jedoch durch eine F-Verteilung gegeben ist.

b) Trigonometrische Funktionen

Cauchy-Verteilung:

Bekanntlich entsteht die Cauchy-Verteilung durch die Abbildung $\tau = \operatorname{arctg} t$ aus der Rechteckverteilung, die bereits in eine Exponentialverteilung transformiert wurde. Macht man gleich den Ansatz

$$\operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-\tau}),$$

so entsteht aus der einseitigen Cauchy-Verteilung (nur $t > 0$ zugelassen)

$$y(\tau) = e^{-\tau}$$

Typ IV:

Das Beispiel der Cauchy-Verteilung, die zum Typ VII gehört, legt folgenden Ansatz für den Typ IV mit $m = 1$ nahe (wenn also der Ausdruck leicht geschlossen integrierbar ist):

$$e^{2q \operatorname{arctg} t} = e^{\pi q} + (1 - e^{q\pi}) e^{-\tau}$$

woraus folgt

$$\frac{1}{1+t^2} e^{2 \cdot q \operatorname{arctg} t} = \frac{1}{2q} (e^{\pi q} - 1) e^{-\tau} \frac{d\tau}{dt}$$

Die linke Seite ist positiv, ebenso $\frac{1}{2q} (e^{\pi q} - 1)$, so daß

die Forderung $\frac{d\tau}{dt}$ stets erfüllt ist (für $0 < t < \infty$).

Damit sind die wichtigsten Fälle erörtert worden, bei denen durch relativ einfache Zeit-Transformationen aus vorgegebenen Verteilungen Exponential-oder Gamma-Verteilungen entstehen. Werden auch komplexe λ_i zugelassen, so hat Cox[15] gezeigt, daß aufgrund der Eulerschen Formeln für den Sinus und Cosinus auch Verteilungen der Form

$$\sum e^{-\alpha_i t} A_i \sin(\beta_i t + \delta_i) \qquad (39)$$

für einen Markoff-Prozeß erfaßbar sind. Hier muß man allerdings recht vorsichtig mit der Verwendung komplexer Wahrscheinlichkeiten als mathematischer Hilfsmittel sein. Hat man das gemacht, so dürfen also auch Verteilungen der Form(39) als Ergebnisse einer Transformation $\tau(t)$ auftreten.

[15] D.R.COX: A use of complex probability in the theory of stochastic processes (Proc.Camb.Phil. Soc. 51, 313 - 19)

IV Markoffsche Prozesse mit Ringschluß

1. Die erzeugende Funktion als Flußgröße:

In einem Markoffschen Prozeß werden Übergänge zwischen Zuständen, etwa der Übergang: Objekt in der j-ten Bearbeitungsstufe ⟶ Objekt in der (j + 1)ten Bearbeitungsstufe betrachtet. Alle Objekte werden als voneinander unabhängig angesehen. Bei dem einfachsten Prozeß mit einem Strom als "input" und exponentieller Bearbeitungszeit zeigte sich bereits, daß eine Ankunftsstufe mit exponentieller Verteilung für die Anfangszeitdifferenz und eine Bearbeitungsstufe mit exponentiell verteilter Bearbeitungszeit unterschieden werden können. Verlassen nun mehr Objekte die Ankunftsstufe, als die Bearbeitungsstufe aufnehmen kann, so bildet sich eine Warteschlange. Dank der exponentiell verteilten Bearbeitungszeit ist es für den Abschluß der Bearbeitung eines Objekts völlig unerheblich, ob dieses Objekt aus der Warteschlange stammt oder sich bereits in der Bearbeitungsstufe befand. Es gibt demnach drei Zustände, zwischen denen Übergänge möglich sind:

Zustand 0: Reservoir, aus dem die Objekte für die Bearbeitung stammen.
Zustand 2: Bearbeitung abgeschlossen.
Zustand 1: Ankunft abgeschlossen.

Es interessieren jetzt in erster Linie die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß sich in einem Zeitpunkt t im Zustand 0 $n_0(t)$, im Zustand 1 $n_1(t)$ und im Zustand 2 $n_2(t)$ Objekte befinden, also die kombinierte Wahrscheinlichkeit:

$$P\,(\,t,\, n_0,\, n_1,\, n_2) \qquad (40)$$

Dafür ist es erforderlich, die Übergänge aus dem Zustand mit der Wahrscheinlichkeit (40) zu untersuchen. In einem

Zeitelement dt sind das nur solche mit den Wahrscheinlichkeiten $P(t,n_o-1,n_1+1,n_2)$, $P(t,n_o,n_1-1,n_2+1)$ und $P(t,n_o+1,n_1,n_2-1)$. Die Wahrscheinlichkeiten für solche Übergänge lauten (40), multipliziert mit dt und Parametern λ_1, λ_2, λ_3. Letztere seien kurz, wenn auch etwas ungenau, als Übergangswahrscheinlichkeiten bezeichnet. Sie können (das ist der homogene Fall) von der Zeit unabhängig sein, sind aber im Allgemeinen Funktionen der Besetzungszahlen n_o,n_1,n_2. Wenn nicht ausdrücklich erwähnt, soll jedoch diese Abhängigkeit nicht bestehen. Diese Idealisierung ist aber nur im beschränkten Masse möglich: Grundsätzlich gibt es keine Übergänge aus einem leeren Zustand heraus oder in einen voll aufgefüllten Zustand hinein.
Um die Wahrscheinlichkeiten (40) explizit zu berechnen, ist es zweckmäßig, eine, in diesem Fall dreidimensionale, erzeugende Funktion

$$Q(t,u_o,u_1,u_2)=\sum_{n_o=0}^{N_o}\sum_{n_1=0}^{N_1}\sum_{n_2=0}^{N_2}P(t,n_o,n_1,n_2)u_o^{n_o}u_1^{n_1}u_2^{n_2} \qquad (41)$$

zu definieren, wo die Summation über alle möglichen Besetzungszahlen der einzelnen Zustände zu erstrecken ist, Eine zeitliche Änderung von Q ist dadurch möglich, daß Übergänge $0 \longrightarrow 1$, $1 \longrightarrow 2$, $2 \longrightarrow 0$ stattfinden.
Wie bereits erwähnt, gibt es im Zustand 1 einen Zufluß aus dem Zustand 0 und einen Abfluß in den Zustand 2. Durch den Zufluß aus 0 wird die Potenz von u_o um 1 gedrückt, die von u_1 um 1 erhöht. Außerdem darf 0 nicht leer, 1 nicht gefüllt sein, was durch $Q_1 - Q_1(u_o = 0)$ ausgedrückt sei. Dabei ist Q_1 die erzeugende Funktion, die aus Q durch Streichen all der Glieder hervorgeht, die $u_1^{N_1}$ enthalten. Man erhält demnach für den Zufluß nach 1:

$$\lambda_1 \frac{u_1}{u_o}\left(\varrho_1 - \varrho_1\ (u_o = 0)\right).$$

Der Abfluß aus 1 ist proportional der Besetzungszahl in 1, also gleich $\lambda_2(\varrho_2 - \varrho_2(u_1 = 0))$, wobei wieder ϱ_2 aus ϱ dadurch hervorgeht, daß alle Glieder mit $u_2^{N_2}$ gestrichen werden. Mithin ist die gesamte Änderung, die im Zustand 1 eintritt

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right)_1 = \lambda_1 \frac{u_1}{u_o}\left(\varrho_1 - \varrho_1(u_o = 0)\right) - \lambda_2\left(\varrho_2 - \varrho_2(u_1 = 0)\right) \tag{42}$$

Entsprechend ergibt sich für die zeitliche Änderung im Zustand 2:

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right)_2 = \lambda_2 \frac{u_2}{u_1}\left(\varrho_2 - \varrho_2(u_1=0)\right) - \lambda_3\left(\varrho_o - \varrho_o(u_2 = 0)\right) \tag{43}$$

(wo ϱ_o wieder ganz analog ϱ_1, ϱ_2 definiert wurde)
und für die zeitliche Änderung im Zustand 0:

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right)_o = \lambda_3 \frac{u_o}{u_2}\left(\varrho_o - \varrho_o(u_2=0)\right) - \lambda_1\left(\varrho_1 - \varrho_1(u_o=0)\right) \tag{44}$$

Allgemein findet man

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right)_i = \lambda_i \frac{u_i}{u_{i-1}}\left(\varrho_i - \varrho_i(u_{i-1}=0)\right) - \lambda_{i+1}\left(\varrho_{i+1} - \varrho_{i+1}(u_i=0)\right) \tag{45}$$

wobei formal $u_{-1} = u_2$, $\varrho_3 = \varrho_o$ gewählt wurde.
Daraus folgt für die gesamte zeitliche Änderung von ϱ, die sich wegen der Unabhängigkeit der Objekte additiv aus den einzelnen Anteilen zusammensetzt:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\lambda_1\left(1 - \frac{u_1}{u_o}\right)\left(\varrho_1 - \varrho_1(u_o=0)\right) - \lambda_2\left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right) \cdot \left(\varrho_2 - \varrho_2(u_1=0)\right) - \lambda_3\left(1 - \frac{u_o}{u_2}\right)\left(\varrho_o - \varrho_o(u_2 = 0)\right) \tag{46}$$

Diese Gleichung (46) ist eine partielle Differential-

Differenzengleichung und in dieser geschlossenen Form bisher nicht lösbar. Meist ist man in einem solchen Prozeß lediglich daran interessiert, wie sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung im Zustand 1 ändert. In diesem Fall wird man $u_o = u_2 = 1$ setzen und erhält:

(47)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\lambda_1(1-u_1)\left(Q_1 - Q_1(u_o=0)\right) - \lambda_2\left(1 - \frac{1}{u_1}\right)\left(Q_2 - Q_2(u_1=0)\right)$$

Ist nun gar die Wahrscheinlichkeit, daß 0 leer $\frac{\text{oder}}{\text{und}}$ 2 voll ist, vernachläßigbar klein[++], dann wird aus Gl.(47) die Gl.(48):

(48)

$$\frac{\partial Q(u_1)}{\partial t} = -\lambda_1(1-u_1)Q_1 - \lambda_2\left(1 - \frac{1}{u_1}\right)\left(Q - Q(u_1 = 0)\right)$$

Was durch Koeffizientenvergleich der Potenzen von u_1 in das bekannte Gleichungssystem übergeht:

$$P_o' = -\lambda_1 P_o$$

$$P_n' = -(\lambda_1+\lambda_2)P_n + \lambda_1 P_{n-1} + \lambda_2 P_{n+1} \qquad (n = 1,2,\ldots.N-1)$$

$$P_N' = -\lambda_2 P_N + \lambda_1 P_{N-1}$$

Durch die Gleichung (45) ist etwas Wesentliches erreicht worden: Sie läßt sich nämlich auf mehr als drei Stufen verallgemeinern, wobei allerdings für jeden neuen Zustand eine Variable in Q dazukommt. Die Gl.(45) läßt sich dabei

---

[++]Was bei Problemen der Maschinenwartung dadurch gegeben ist, daß die Zahl der Bearbeitungsstellen erheblich kleiner als die Zahl der Maschinen ist und bei Problemen des Schalterverkehrs dadurch,daß die Reservoirs der Objekte, aus denen der "input" stammt bzw. in die der "output", unendlich groß sind.

vollkommen übertragen, nur wird jetzt bei n Stufen formal $u_{-1} = u_n$, $Q_{n+1} = Q_o$ gesetzt. λ_{n+1} drückt wieder die Rück-Kopplung zwischen Anfangs-und Endzustand aus. Die Gleichung für ein System aus n + 1 hinter einander geschalteten Stufen lautet dann:

$$-\frac{\partial Q}{\partial t} = \lambda_1\left\{1-\frac{u_1}{u_o}\right\}\left\{Q_1 - Q_1(u_o=0)\right\} + \lambda_2\left\{1-\frac{u_2}{u_1}\right\}\cdot\left\{Q_2 - Q_2(u_1=0)\right\} + \cdots$$
$$+\lambda_{n+1}\left\{1-\frac{u_o}{u_n}\right\}\cdot\left\{Q_o - Q_o(u_n=0\right\} \quad (50)$$

Diese allgemeine Gleichung (50) basiert im Wesentlichen auf der Annahme, daß alle Objekte, die den j-ten Zustand verlassen, in den (j + 1)ten eintreten. Das ist in sog. "Systemen mit Verlusten"nicht der Fall. Bei diesen gehen während des Prozesses Objekte verloren.Ebenso ist es denkbar, daß neue Objekte dazu kommen. Genau wie im Fall des elektrischen und eines Flüssigkeits-Stromes kann man dann geeignete Quellen und Senken für den vorliegenden Strom definieren. In der Physik spricht man hier von Divergenzen eines Stromes. Solche Prozesse treten besonders dann auf, wenn die einzelnen Zustände bei endlicher Kapazität voneinander unabhängig sind.

In einem parallel geschalteten System gibt es Übergänge vom Anfangszustand in jede der n - 1 parallel geschalteten Stufen, für die daher außer λ_1 noch Präferenzen $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_{n-1}$ definiert werden müssen. Im Allgemeinen werden diese davon abhängig sein, ob ein bestimmter Zustand voll besetzt ist oder nicht. Ist jedoch ein solches Ausweichen auf andere Zustände, wenn einer voll besetzt ist, nicht möglich, die Übergänge zu den einzelnen Zuständen also voneinander unabhängig, so ergibt sich

$$-\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \lambda_1 \pi_1 (1-\frac{u_1}{u_o})(\varrho_1-\varrho_1(u_o=0))+\lambda_2(1-\frac{u_n}{u_1})(\varrho_n-\varrho_n(u_1=0))$$

$$\lambda_1 \pi_2 (1-\frac{u_2}{u_o})(\varrho_2-\varrho_2(u_o=0))+\lambda_3(1-\frac{u_n}{u_2})(\varrho_n-\varrho_n(u_2=0))$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (51)$$

$$+\lambda_1 \pi_{n-1}\left(1-\frac{u_{n-1}}{u_o}\right)\left(\varrho_{n-1}-\varrho_{n-1}(u_o=0)\right)+\lambda_n\left(1-\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)$$

$$\left(\varrho_n-\varrho_n(u_{n-1}=0)\right)+\lambda_{n+1}\left(1-\frac{u_o}{u_n}\right)\left(\varrho_o-\varrho_o(u_n=0)\right)$$

Man sieht sehr deutlich, daß hier praktisch eine Überlagerung von n-1 einfachen Markoff-Prozessen vorliegt.Die Separierbarkeit scheint durch die Rück-Kopplung verloren zu gehen. Da $\sum \pi_i = 1$, also auch $\lambda_{n+1} = \sum \pi_i \lambda_{n+1}$ ist und die Objekte in ihrem Verhalten während des Prozesses ununterschiedbar sind, kann formal jedes Objekt einem bestimmten der n-1 Prozesse zugeordnet werden,in dem es dann für alle Zeiten bleibt,ohne daß sich am Gesamtverlauf des Prozesses etwas ändern würde.Im Falle endlicher Kapazitäten der gemeinsamen Zustände müßten diese dann nach den Präferenzen in Unterkapazitäten unterschieden werden,also N_o in $\pi_1 N_o \ldots\ldots \pi_{n-1} N_o$ und N_n in $\pi_1 N_n \ldots\ldots \pi_{n-1} N_n$ unterteilt werden. Dadurch gehen jedoch einige Übergänge verloren. Daher ist erst für $N_n \longrightarrow \infty$ und $P(n_o = 0) = 0$ eine Separation möglich.
Die Rück-Kpplung kann natürlich auch wieder in verschiedenen Stufen verlaufen, ebenso der Übergang der einzelnene Zwischenzustände in den Endzustand. Man wird bei der Lösung eines solch komplizierten Systems, das möglicherweise auch mehrfach Verzweigungem enthält, in so viele Ketten auflösen, daß keine Verzweigungen mehr übrig bleiben. Es werden dann bestimmte Zustände nur einer einzigen Kette, andere wiederum mehreren Ketten zuzuordnen sein.

Man ist nur dann sicher, durch Lösung der Gleichungen für die einzelnen Ketten auch eine Lösung des Gesamtsystems gefunden zu haben, wenn durch die Separation keine Übergänge verloren gehen. Damit ist der aus der Gl.(19) hervorgehende Stufenprozeß voll erfasst worden.
Mehr soll zunächst über die einzelnen Systeme im Allgemeinen nicht gesagt werden. Es seien jetzt die Lösungen erörtert.

2. Zweistufen-Ringsystem.

Die Gleichung eines solchen Systems lautet:

$$-\frac{\partial Q}{\partial t} = \lambda_1(1-\frac{u_1}{u_o})(Q_1-Q_1(u_o=0))+\lambda_2(1-\frac{u_o}{u_1})(Q_o-Q_o(u_1=0)) \qquad (52)$$

Das ergibt sich aus Gl.(46) sofort, wenn man $u_o = u_2$ setzt. Die Gleichung (52) ist trivialerweise für $u_o = u_1$ erfüllt, da keine Objekte dem System verloren gehen oder Hinzukommen.

Wie man leicht sieht, sind es gerade die Einflüsse der oberen und unteren Begrenzung der einzelnen Zustände, die eine direkte Lösung verhindern. Existierten diese nicht (d.h. wären sämtliche Besetzungszahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ zugelassen), so wäre die Lösung sofort angebbar. Sie lautete

$$Q = Q_o \exp\left[-\lambda_1 t(1-\frac{u_1}{u_o})-\lambda_2 t(1-\frac{u_o}{u_1})\right] \qquad (53)$$

$Q_o = Q(t=0)$ wird i.a. so vorgegeben sein, daß alle sich im System befindlichen Objekte in diesem Zeitpunkt im Zustand 0 versammelt sind. Dann aber ist $Q_o = u_o^N$, wo N die Gesamtzahl der Objekte ist. Wird nun eine Barriere für die Besetzungszahlen eingeführt, so daß negative Besetzungszahlen ausgeschlossen sind, jedoch alle posi-

tiven möglich sind, so ist die Lösung nicht einfach angebbar, wohl aber die stationäre Lösung für $t \to \infty$. In diesem Fall wird $\partial \varrho / \partial t \to 0$, d.h. in jedem Zustand ist aufgrund der Gl.(45) der Zustrom gleich dem Abstrom.Es führt dann ein Separationsansatz:

$$\varrho = \varrho^{o}(u_o)\, \varrho^{1}(u_1) \qquad (54)$$

zum Ziel. Setzt man Gl.(54) in die Gl.(52) für $\frac{\partial \varrho}{\partial t} \to 0$ ein, dann ergibt sich nach einigen trivialen Umformungen

$$\lambda_1 \frac{\varrho^{o}-\varrho^{o}(u_o=0)}{u_o\, \varrho^{o}} = \lambda_2 \frac{\varrho^{1}-\varrho^{1}(u_1=0)}{u_1\, \varrho^{1}} \qquad (55)$$

Die Variablen u_o und u_1 sind laut Voraussetzung unabhängig voneinander. Wird u_o variiert, so bleibt die rechte Seite konstant, da sie u_o garnicht enthält.Wird u_1 variiert, so bleibt die linke Seite konstant, da sie u_1 nicht enthält.Daraus folgt, daß beide Seiten gleich einer Konstanten sind.

Es ergeben sich demnach die beiden Gleichungen:

$$\lambda_1(\varrho^{o}-\varrho^{o}(u_o=0)) = \alpha u_o \varrho^{o} \Rightarrow \varrho^{o} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\alpha u_o}\, \varrho^{o}(u_o=0)$$

$$\lambda_2(\varrho^{1}-\varrho^{1}(u_1=0) = \alpha u_1 \varrho^{1} \qquad \varrho^{1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\alpha u_1}\, \varrho^{1}(u_1=0) \qquad (56)$$

Da $\varrho^{o}(u_o=1)=1$ und $\varrho^{1}(u_1=1)$ beide normiert sind, wird

$$\varrho^{o} = \frac{\lambda_1-\alpha}{\lambda_1-\alpha u_o} \;,\; \varrho^{1} = \frac{\lambda_2-\alpha}{\lambda_2-\alpha u_1}, \text{also} \varrho = \varrho^{o}\cdot\varrho^{1} = \frac{\lambda_1-\alpha}{\lambda_1-\alpha u_o}\cdot\frac{\lambda_2-\alpha}{\lambda_2-\alpha u_1} \qquad (57)$$

Es kann dann noch eine Größe, z.B. $\varrho^{o}(u_o=0)$ oder $\varrho^{1}(u_1=0)$ (allerdings $\neq 0$)vorgegeben werden,da α noch frei wählbar ist.

$$\varrho^{o}(u_o=0) = 1-\alpha/\lambda_1,\; \varrho^{1}(u_1=0) = 1-\alpha/\lambda_2$$

Ist $Q(u_o=0)=0$ oder $Q(u_1=0)=0$, so ist die stationäre Differenzengleichung nicht mehr symmetrisch und damit die Variablen u_o und u_1 nicht mehr separierbar. In diesem Fall liefert die Division von Gl.(52) durch $u_o - u_1$

$$\frac{\lambda_1}{u_o} Q - \frac{\lambda_2}{u_1} \left(Q-Q(u_1=0)\right) = 0$$

woraus folgt

$$Q = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1 u_1/u_o} \; Q\,(u_1 = 0)$$

Da $Q(u_o, u_1 = u_o)$ zeitlich konstant bleibt, also gleich der Anfangsverteilung ist, die etwa u_o^N sei, so ist

$$Q \approx \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1 u_1/u_o} \cdot u_o^N \qquad (58)$$

Für $u_o = 1$ geht diese Gl.(58) in die bekannte Darstellung der erzeugenden Funktion eines Systems mit einfachem Strom als "input" und exponentieller Bedienungszeit in der Grenze: Zahl der Bedienungsstellen $\longrightarrow \infty$ über. Sie ist dann auch mit der vorigen Lösung für $\alpha = \lambda_1$ identisch.

Die Separation des zeitabhängigen Systems geht selbst über eine Laplace-Transformation nicht, wie im folgenden einzusehen ist:

$$\phi(s,u_o,u_1) = \int_o^\infty e^{-st} \frac{\partial Q(t,u_o,u_1)}{\partial t}\, dt = \left[e^{-st} Q(t,u_o,u_1)\right]_o^\infty +$$

$$+ s \int_o^\infty e^{-st} Q(t,u_o,u_1)\, dt = -Q(0,u_o,u_1) + s\phi(s,u_o,u_1)$$

Dann wird die Gl.(52) zu (59)

$$s\phi(s,u_o,u_1) - Q(0,u_o,u_1) = -\lambda_1 \left(1 - \frac{u_1}{u_o}\right)\left[\phi(s,u_o,u_1) - \phi(s,0,u_1)\right] -$$

$$- \lambda_2 \left(1 - \frac{u_o}{u_1}\right)\left[\phi(s,u_o,u_1) - \phi(s,u_o,0)\right]$$

Es ist nun gerade die Anfangsverteilung $Q(0,u_o,u_1)$, die eine Separation verhindert. Diese sei durch $Q(0,u_o,u_1)=u_o^N$ gegeben. Da die Zahl der Objekte im System konstant bleibt, ist die gesuchte Funktion $\phi(s,u_o,u_1)$ in der Form

$$\phi = \sum_{k=0}^{N} \phi_k(s)\, u_o^N (u_1/u_o)^k = \varphi\, u_o^N$$

darstellbar. Mit diesem Ansatz wird die Gl.(59) nach Division durch u_o^N zu

$$s \sum_{k=0}^{N} \phi_k(s)(u_1/u_o)^{k-1} = -\lambda_1(1-\frac{u_1}{u_o}) \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k(u_1/u_o)^k - \lambda_2(1-\frac{u_o}{u_1}) \sum_{k=1}^{N} \phi_k(u_1/u_o)^k \qquad (59a)$$

Es geht offenbar keine Information betreffs der ϕ_k verloren, wenn $u_o=1$ gesetzt wird. Im Grenzübergang $N \to \infty$ ergibt sich die Lösung

$$\phi = \frac{u_1 - \lambda_2(1-u_1)\phi(u_1=0)}{su_1 + (\lambda_1 u_1 - \lambda_2)(1-u_1)} \qquad (60)$$

Für $u_1=1$ ist $\phi = 1/s$, also die L.T. der Zahl 1, wie nicht anders zu erwarten war.
Für endliches N folgt sofort durch Koeffizienten-Vergleich nach Potenzen $(u_1/u_o)^k$ aus Gl.(59a)

$$s\,\phi_o(s)-1 = -\lambda_1\phi_o(s)+\lambda_2\phi_1(s) \qquad (61)$$

$$s\phi_k(s) = -(\lambda_1+\lambda_2)\phi_k(s)+\lambda_2\phi_{k+1}(s)+\lambda_1\phi_{k-1}(s) \qquad (1\leq k\leq N-1)$$

$$s\phi_N(s) = \lambda_1\phi_{N-1}(s)-\lambda_2\phi_N(s)$$

Daraus ergeben sich die $\phi_k(s)$, mithin auch $\phi(s,u_o,u_1)$ und durch Rücktransformation die gesuchte Funktion

$Q(t,u_o,u_1)$.Der Vorteil der L.T. besteht in diesem Fall lediglich darin, daß man es statt mit Differentialgleichungen mit linearen Gleichungen zu tun hat. Diese sind einem Computer angemessener.

3. Mehrstufen-Ringsystem.

Die Ergebnisse für das Zweistufenringsystem lassen sich auf beliebig viele, etwa n, Stufen verallgemeinern.Es wird also wieder so sein, daß für das System ohne Barriere bei der Besetzung 0 für jeden Zustand sich die Lösung der Differentialgleichung im stationären Fall sofort angeben läßt. Es folgt dann aus der Gl.(45) die Gl.(62):

$$\lambda_i \frac{Q - Q(u_{i-1}=0)}{Q \cdot u_{i-1}} = \lambda_{i+1} \frac{Q - Q(u_i=0)}{Q u_i} \qquad (62)$$

$$(1 \leq i \leq n)$$

Ein Separationsansatz führt hier zum Ziel

$$Q = Q_o(u_o)\ Q_1(u_1) \ldots\ldots\ldots Q_n(u_n). \qquad (63)$$

nämlich auf die Gl.(64)

$$\lambda_i \frac{Q_{i-1} - Q_{i-1}(u_{i-1}=0)}{Q_{i-1} u_{i-1}} = \lambda_{i+1} \frac{Q_i - Q_i(u_i=0)}{Q_i u_i} \qquad (64)$$

$$(1 \leq i \leq n)$$

Aus der Unabhängigkeit der Variablen u_i ergibt sich nach den gleichen Schlüssen, die auf die Gl.(56) führten, daß in Gl.(64) zwei Konstanten gleich gesetzt wurden.Das liefert aber sofort die Lösung

$$Q_i = \frac{\lambda_{i+1} - \alpha}{\lambda_{i+1} - \alpha u_i} \qquad (65)$$

also insgesamt nach Gl.(63)

$$Q = \prod_{i=0}^{n} \frac{\lambda_{i+1} - \alpha}{\lambda_{i+1} - \alpha u_i} \qquad (66)$$

Ist $Q(u_o=0)=0$, so läßt sich u_o nicht abseparieren und es folgt $\alpha = \lambda_1$, also

$$Q = \prod_{i=0}^{n} \frac{\lambda_{i+1} u_o - \lambda_1}{\lambda_{i+1} u_o - \lambda_1 u_i} \qquad (67)$$

Ebenso ist es, wenn noch andere $Q(u_i=0)$ sind. Insofern ist also $Q(u_i=0)$ ein Maß für die Separierbarkeit der Variablen u_i.

4. Mehrstufen-Ringsystem mit $\lambda_i = \lambda_i(k)$
(k Besetzungszahl).

Die mögliche Separierbarkeit der Variablen in der stationären Lösung für ein einfaches Mehrstufen-Ringsystem kann auch zur Lösung solcher Systeme benutzt werden, deren λ_i von der Besetzungszahl des Zustandes abhängig sind, von dem sie erfolgen. Man muß dann statt λ_i $\lambda_{i,k}$ schreiben. In diesem Fall wird der Differenzenquotient in der Gleichung für Q oft durch einen Differentialquotienten ersetzt. Für ein System, in dem alle $\lambda_{i,k}$ in der Form $\lambda_{i,k} = \lambda_i \cdot k$ anzusetzen sind, erhielte man gerade die erste Ableitung, also

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\lambda_1(u_o - u_1)\frac{\partial Q}{\partial u_o} - \lambda_2(u_1 - u_2)\frac{\partial Q}{\partial u_1} \cdots\cdots\cdots - \lambda_{n+1}(u_n - u_o)\frac{\partial Q}{\partial u_n} \qquad (68)$$

Die Lösung ist im stationären Fall wieder leicht anzugeben. Sie lautet nämlich:

$$Q=\exp\left\{\alpha\cdot\left[\lambda_1^{-1}(u_o-1)+\lambda_2^{-1}(u_1-1)+\ldots.\lambda_{n+1}^{-1}(u_n-1)\right]\right\}$$

Dabei ist α noch ein freier Parameter, der durch die Anfangsbedingungen gegeben sein kann.
Auch hier liegt also eine Separierbarkeit der Variablen vor. Man kann diese Eigenschaft natürlich benutzen, um die Lösung eines Systems anzugeben, daß für gewisse Variable, etwa 0.....r, Differenzenquotienten, für andere, etwa r + 1.....n, Differentialquotienten enthält. Es folgt dann mit dem Ansatz (63)

$$\lambda_1\frac{Q_o-Q_o(0)}{Q_o\cdot u_o}=\lambda_2\frac{Q_1-Q_1(0)}{Q_1\cdot u_1}=\ldots.=\lambda_{r+1}\frac{Q_r-Q_r(0)}{Q_r\cdot u_r}=$$
$$\lambda_{r+2}\frac{1}{Q_{r+1}}\frac{\partial Q_{r+1}}{\partial u_{r+1}}=\ldots..=\lambda_{n+1}\frac{1}{Q_n}\frac{\partial Q_n}{\partial u_n}\qquad(70)$$

mit der Lösung

$$Q=\prod_{i=0}^{r}\frac{\lambda_{i+1}-\alpha}{\lambda_{i+1}-\alpha u_i}\prod_{j=r+1}^{n}\exp\left[\alpha\cdot\lambda_{j+1}^{-1}(u_j-1)\right]\qquad(71)$$

Man kann so noch eine ganze Reihe von Prozessen angeben. Ist z.B. für ein bestimmtes i $\lambda_{i,k}=\lambda_i k(k-1)\ldots(k-r+1)$, so wird man für Q_{i-1} eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{u_{i-1}^{r-1}}{Q_{i-1}}\cdot\frac{\partial^r Q_{i-1}}{\partial u_{i-1}^r}=\alpha\qquad(72)$$

zu lösen haben, ohne daß sich prinzipiell etwas ändert. Diese Differentialgleichungen sind allerdings i.a.nicht

elementar lösbar. Für andere Abhängigkeiten $\lambda_i(k)$ werden die Differentialgleichungen (72) komplizierter, z.B. für

$$\lambda_{i,k}=k^2\cdot\lambda_i=\left[k(k-1)+k\right]\cdot\lambda_i$$

$$u_i\,\frac{\partial^2 Q_{i-1}}{\partial u^2_{i-1}}+\frac{\partial Q_{i-1}}{\partial u_{i-1}}=\alpha\,Q_{i-1} \qquad (72a)$$

5. Kettenverzweigung.

Auf die Schwierigkeiten,die bei diesem Problem auftauchen, ist bereits hingewiesen worden. Auch in diesem Fall wird man aber $\partial Q/\partial t$ in eine Summe der zeitlichen Veränderungen in allen Zuständen (in der Art der Gl.(45)) aufspalten können, wenn auch die resultierenden Gleichungen nicht voneinander unabhängig sind (man wird dann alle Variablen bis auf eine = 1 setzen).
Da in der vorliegenden Arbeit besonders solche Prozesse von Interesse sind, bei denen der Eingangsprozeß ("input") auf einer bestimmten Zahl parallel laufender Ketten,etwa r, mit bzw. $m_1,m_2,\ldots\ldots m_r$ Stufen vor sich geht, der Bedienungsprozeß ("output") in k Ketten mit bzw. $n_1,n_2,\ldots\ldots n_k$ Stufen, so ergibt sich als Gleichung für die erzeugende Funktion:

$$\sum_{i=1}^{r}\left\{\lambda_{i,1}(1-u_{i,1})\cdot Q+\lambda_{i,2}(1-u_{i,2}/u_{i,1})\cdot\left(Q-Q(u_{i,1}=0)\right)\right.$$

$$\left.+\ldots+\lambda_{i,m_i}\left[1-\frac{\sum_{\varkappa=1}^{k}\pi_{i,\varkappa}\cdot v_{\varkappa,1}}{u_{i,m_i-1}}\right]\cdot\left[Q-Q(u_{i,m_i-1}=0)\right]\right\}$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\left\{\mu_{j,1}(1-v_{j,2}/v_{j,1})\cdot\left(Q-Q(v_{j,1}=0)\right)+\ldots\right.$$

$$+ \mu_{j,n_j-1}\left[1 - \frac{v_{j,n_j}}{v_{j,n_j-1}}\right]\cdot\left[Q - Q(v_{j,n_j-1}=0)\right]$$
$$+ \mu_{j,n_j}\left[1 - 1/v_{j,n_j}\right]\cdot\left[Q - Q(v_{j,n_j}=0)\right] = -\frac{\partial Q}{\partial t}$$

(72)

Dabei beziehen sich die $u_{i,\alpha}$ und $\lambda_{i,\alpha}$ auf den "input", die $v_{i,\beta}$ und $\mu_{i,\beta}$ auf den "output". Die $\lambda_{i,\alpha}$ und $\mu_{i,\beta}$ seien von der Besetzungszahl der voraufgegangenen Zustände sowie die Präferenzen $\pi_{i,\varkappa}$ für die einzelnen Bedienungsketten von deren Besetzungszahl unabhängig.

In der vorliegenden Form gilt die Gl.(72) allerdings nur für unendliche Kapazität der einzelnen Zustände, doch sollen solche vorerst auch nur behandelt werden. Die Voraussetzung über die π_i bedeutet dann allerdings, daß angekommene Objekte auch bei Gefülltsein einer Kette nicht ihre Präferenz ändern, also nicht etwa auf andere Ketten ausweichen. Es ist dies bereits dadurch berücksichtigt, daß der Zustand, der der Variablen $v_{\varkappa,1}$ entspricht, bedeutet: Ankunftsprozeß abgeschlossen und für die $\varkappa$-te Bedienungskette entschieden.
Die stationäre Lösung läßt sich sofort angeben:

$$Q = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\prod_{\alpha=1}^{m_i-1}\frac{1 - \frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{i,\alpha+1}}}{1 - \frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{i,\alpha+1}}u_{i,\alpha}}\prod_{\beta=1}^{n_j}\frac{1 - \frac{\pi_{i,j}\cdot\lambda_{i,1}}{\mu_{j,\beta}}}{1 - v_{j,\beta}\frac{\pi_{i,j}\cdot\lambda_{i,1}}{\mu_{j,\beta}}}$$

(73)

Wie man sofort durch Einsetzen bestätigt.

6. Systeme mit oberer Begrenzung.

Sämtliche Gleichungen dieses Kapitels, soweit sie sich mit einseitig begrenzten Zuständen beschäftigen,fordern eine spezielle Wahl des Nullpunkts der Besetzungszahl. Es kann daher von jedem Zustand i gefordert werden, daß eine bestimmte Mindest-Besetzungszahl a_i nicht unter - schritten werden darf. Definiert man dann etwa im Falle dreier Zustände statt der Gl.(41) eine Gl.(74)

$$Q'(t,u_o,u_1,u_2) = \sum_{n_o=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} P(t,a_o+n_o,a_1+n_1,a_2+n_2)\, u_o^{n_o}\, u_1^{n_1}\, u_2^{n_2} \qquad (74)$$

und verallgemeinert ganz entsprechend auf beliebig viele Zustände, so lauten die gewonnenen Ergebnisse ganz analog, wenn man statt Qjeweils Q' setzt. Darf etwa in einem System in jedem Zustand eine bestimmte Höchstzahl b_1 nicht überschritten werden, während nach unten bis - ∞ keine Grenzen gesetzt sind, so lassen sich in gewisser Weise auch hier die Ergebnisse übertragen. Es ist dann nämlich zweckmäßig, statt der Gl.(74) die folgende Gl.(75) zu definieren:

$$Q''(t,u_o,u_1,u_2) = \sum_{n_o=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} P(t,b_o-n_o,b_1-n_1,b_2-n_2)\cdot u_o^{n_o}\cdot u_1^{n_1}\cdot u_2^{n_2} \qquad (75)$$

und entsprechend die Verallgemeinerung auf mehr als 3 Zustände. In diesem Fall tritt jedoch eine Komplikation auf. Eine Änderung im Zustand i kann wieder durch Zufluß aus dem Zusatnd i-1 und durch Abfluß in den Zustand i+1 geschehen. Ersterer erhöht die Potenz von u_{i-1} und erniedrigt die von u_i.Außerdem darf der Zustand nicht voll besetzt sein. Die zeitliche Änderung im Zustand i lautet dann anders als in Gl.(45):

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_i = \lambda_i \frac{u_{i-1}}{u_i}\left[Q - Q(u_i = 0)\right] - \lambda_{i+1}\left[Q - Q(u_{i+1} = 0)\right] \qquad (76)$$

Das System ergibt sich dann durch Summation über die Einzeländerungen, also für ein Mehrstufen-Ringsystem mit n+1 Stufen

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \lambda_{n+1}\left[1 - \frac{u_n}{u_0}\right]\cdot\left[Q - Q(u_0 = 0)\right] + \lambda_1\left[1 - \frac{u_0}{u_1}\right]\cdot\left[Q - Q(u_1 = 0)\right] \qquad (77)$$
$$+ \ldots + \lambda_n\left(1 - u_{n-1}/u_n\right)\left[Q - Q(u_n = 0)\right]$$

Diese läßt sich auf die Gl.(50) für $Q_i = Q(i=0,1....n)$ abbilden, wenn man den Zustand k auf den Zustand n-k und damit auch λ_k auf λ_{n+2-k} abbildet. Man kann aber auch sagen: Die Zeitrichtung wird vertauscht, so daß auch ein leeres System jetzt einem aufgefüllten entspricht. Wollte man auch eine evtl. Abhängigkeit der λ_i von der Besetzung berücksichtigen: Nur müßte sich diese Abhängigkeit der Zeitumkehr nicht auf den Ausgangszustand für den Übergang mit λ_i, sondern auf den Endzustand des Übergangs mit λ_{n+2-i} beziehen. Dann lassen sich auch die dort gewonnenen Ergebnisse übertragen.

V. Stufenprozesse ohne Ringschluß:

1. Zweistufen-System ohne Ringschluß:

Das ist ein ankommender Strom in 2 exponentiell verteilten Schritten. In diesem Fall lautet die Gleichung:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\lambda_1(1-u)Q(t,u,v) + \lambda_2\left(\frac{v}{u}-1\right)\left[Q(t,u,v) - Q(t,0,v)\right] \quad (78)$$

Eine stationäre Lösung ist jetzt nicht zu erwarten, da der Ringschluß fehlt, sich also für $t \longrightarrow \infty$ alle Objekte im Endzustand befinden. Auch in diesem Fall ist die zeitabhängige Lösung nicht direkt anzugeben.
Man kommt dann mit einer Entwicklung nach v weiter

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\partial^k Q(t,u,v)}{\partial v^k}\right]_{v=0} v^k = -\lambda_1(1-u)\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\partial^k Q(t,u,v)}{\partial v^k}\right]_{v=0} v^k \quad (79)$$
$$+\lambda_2\left(\frac{v}{u}-1\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\partial^k\{Q(t,u,v)-Q(t,0,v)\}}{\partial v^k}\right]_{v=0} v^k$$

Der Koeffizient für k = 0 liefert:

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(t,u,0) + \lambda_1(1-u)Q(t,u,0) + \lambda_2 Q(t,u,0) = \lambda_2 Q(t,0,0) \quad (80)$$

Zur Lösung müßte man $Q(t,0,0)$ kennen. Setzt man in der Ausgangsgleichung u = v, so wird

$$\frac{\partial Q(t,u,u)}{\partial t} = -\lambda_1(1-u)Q(t,u,u)$$

und diese Differentialgleichung hat bekanntlich die Lösung

$$Q(t,u,u) = e^{-\lambda_1(1-u)t}\,Q(0,u,u)$$

Nun sollten zum Zeitpunkt 0 alle Objekte im Ausgangsreservoir sein, das hier als unendlich groß angenommen wird und nicht zu den beiden Zuständen gehört.

In diesem Fall ist also $Q(0,u,u) = 1$, also

$$Q(t,u,u) = e^{-\lambda_1 t(1-u)} = e^{-\lambda_1 t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} u^k$$

Speziell ist $Q(t,0,0) = e^{-\lambda_1 t}$

Damit wird die Differentialgleichung für $Q(t,u,0)$ eine inhomogene lineare Differentialgleichung in t. Die homogene Lösung lautet

$$Q_h(t,u,0) = Q_h(0,u,0)\, e^{-[\lambda_1(1-u)+\lambda_2]t}$$

Durch Variation der betreffs t Konstanten $Q_h(0,u,0)$ erhält man dann die inhomogene Lösung, also

$$Q(t,u,0) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1 u}\left[\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 u\, e^{-[\lambda_1(1-u)+\lambda_2]t}\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda_2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2} u\right]^k \cdot \left[\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \cdot u \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} u^k\right],$$

also für jeden Koeffizienten von u^k für $t \longrightarrow \infty$ gegen 0.
Für $k = 1$ ergibt sich:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1(1-u) + \lambda_2\right]\left(\frac{\partial Q(t,u,v)}{\partial v}\right)_{v=0} = \frac{\lambda_2}{u} Q(t,u,0) -$$

$$- \frac{\lambda_2}{u} Q(t,0,0) + \lambda_2 \left(\frac{\partial Q(t,0,v)}{\partial v}\right)_{v=0}$$

$Q(t,u,0)$ ist bereits bekannt, ebenso $Q(t,0,0)$.
Aber auch $\left(\frac{\partial Q(t,0,v}{\partial v}\right)_{v=0}$ läßt sich leicht ermitteln.

Es ist nämlich $\left(\frac{\partial Q(t,u,u)}{\partial u}\right)_{u=0} = \left(\frac{\partial Q(t,u,0)}{\partial u}\right)_{u=0} + \left(\frac{\partial Q(t,0,v)}{\partial v}\right)_0$

Da $\left(\frac{\partial Q(t,u,u)}{\partial u}\right)_{u=0} = \lambda_1 t \cdot e^{-\lambda_1 t}$,

$$\left[\frac{\partial Q(t,u,0)}{\partial u}\right]_{u=0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left[e^{-\lambda_1 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right]$$

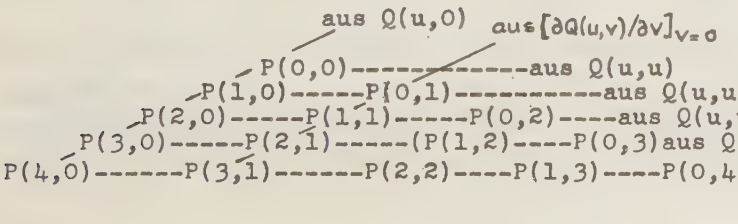
ist $\left[\frac{\partial Q(t,0,v)}{\partial v}\right]_{v=0} = \left[\lambda_1 t - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right]\cdot e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$

Dieser Ausdruck ist die Inhomogenität für die Gleichung für $\left[\frac{\partial Q(t,u,v)}{\partial v}\right]_{v=0}$

Man kann so sukzessive sämtliche Differentialgleichungen für alle Koeffizienten von v^k lösen.
Will man auf die sukzessive Lösung verzichten, so geht das auch, nur erhält man dann lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung. Bei der Differentialgleichung für k = 2 würde man z.B. mit $u/\lambda_2\,[\partial/\partial t + \lambda_1(1-u)+\lambda_2]$ von links multiplizieren und erhielte durch Subtraktion der Gleichung für k = 0 eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.
Das erstere Verfahren scheint jedoch das einfachere zu sein. Da

$$\frac{1}{k!\,r!}\left[\frac{\partial^{k+r} Q(t,u,v)}{\partial u^k\,\partial v^r}\right]_{u=v=0} = P(t,k,r)$$

ist, also der Wahrscheinlichkeit gleich, zur Zeit t im Zustand 1 k Objekte, im Zustand 2 r Objekte zu finden, so können die Einzellösungen anhand des folgenden Verfahrens gefunden werden (t ist der Einfachheit halber weggelassen worden):



Die zugehörigen Werte sind:

$$P(0,0)=e^{-\lambda_1 t}$$

$$P(1,0)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left[e^{-\lambda_1 t}-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right]$$

$$P(0,1)=\left[\frac{-\lambda_1}{\lambda_2}+\lambda_1 t\right]\cdot e^{-\lambda_1 t}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

$$P(2,0)=\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right]^2 e^{-\lambda_1 t}-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left[\lambda_1 t+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right]\cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

$$P(1,1)=(\lambda_1/\lambda_2)\left[\lambda_1 t-\lambda_1/\lambda_2\right]e^{-\lambda_1 t}-\left[\frac{(\lambda_1 t)^2}{2!}-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right]\cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

$$P(0,2)=\left[\frac{(\lambda_1 t)^2}{2!}-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\lambda_1 t\right]e^{-\lambda_1 t}+\left[\frac{(\lambda_1 t)^2}{2!}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\lambda_1 t\right]e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

$$P(3,0)=\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^3\cdot e^{-\lambda_1 t}-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left[\frac{(\lambda_1 t)^2}{2!}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\lambda_1 t+\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right]\cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

$$P(2,1)=(\lambda_1/\lambda_2)^2\left[\lambda_1 t-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right]e^{-\lambda_1 t}-\left[\frac{2(\lambda_1 t)^3}{3!}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{(\lambda_1 t)^2}{2!}-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^3\right]\cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

$$P(1,2)=(\lambda_1/\lambda_2)\left[\frac{(\lambda_1 t)^2}{2!}-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\lambda_1 t\right]e^{-\lambda_1 t}$$
$$-\left[2\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{(\lambda_1 t)^4}{4!}-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{(\lambda_1 t)^2}{2!}-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\lambda_1 t\right]\cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

$$P(0,3)=\left[\frac{(\lambda_1 t)^3}{3!}-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{(\lambda_1 t)^2}{2!}\right]\cdot e^{-\lambda_1 t}$$
$$+\left[2\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{(\lambda_1 t)^4}{4!}+\frac{2(\lambda_1 t)^3}{3!}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{(\lambda_1 t)^2}{2!}\right]\cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

Es ergibt sich also eine Summe aus einem Anteil mit $e^{-\lambda_1 t}$ und einem mit $e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$

Davon wird der Anteil mit $e^{-\lambda_1 t}$ durch einen Ausdruck

$$\frac{1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}v}{1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}u}\cdot e^{-\lambda_1 t(1-v)} \qquad (82)$$

beschrieben. Wie man durch Einsetzen in die Hauptgleichung feststellt, ist dieser Ausdruck eine Partikular-Lösung des Systems. Sie ist allerdings nicht mit der Anfangsbedingung $Q(t=0)=1$, sondern mit

$$Q(t=0) = \frac{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} v}{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} u}$$

verträglich. Das ist für v = 1 gerade die stationäre Lösung für ein Zweistufen-Ringsystem. Gibt es noch eine zweite Partikular-Lösung, so wäre das System auch für $Q(0,u,v) = 1$ lösbar. Wie bereits erörtert, ist $Q(t,u,u) = \exp\left[-\lambda_1 t(1-u)\right]$. Es wird aber eine Lösung der Form $Q_1 \exp\left[-(\lambda_1+\lambda_2)t\right]$ gesucht. Das bedeutet: $Q_1(t,u,u) \equiv 0$, speziell $Q_1(t,0,0)=0$.
Es folgt dann $Q_1(t,u,0) = e^{\lambda_1 ut} \cdot Q_1(0,u,0)$ und wegen

$$Q_1(0,u,0) - \frac{1}{1 - \lambda_1 u/\lambda_2} = 1 \Rightarrow Q_1(0,u,0) = -\frac{\lambda_1 u}{\lambda_2 - \lambda_1 u}$$

$$\text{also } Q_1(t,u,0) = -\frac{\lambda_1 u}{\lambda_2 - \lambda_1 u} e^{\lambda_1 ut}$$

entsprechend folgt:

$$\left[\frac{\partial Q_1(t,u,v)}{\partial v}\right]_{v=0} = \frac{1}{u}\left(e^{\lambda_1 ut} - 1\right) - \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 t}{\lambda_2 - \lambda_1 u} e^{\lambda_1 ut}$$

Die weiteren Lösungen werden schon zu kompliziert und sollen daher hier nicht referiert werden.

2. Mehrstufensystem ohne Ringschluß

$$-\frac{\partial Q}{\partial t} = \lambda_1(1-u_1)Q + \lambda_2\left(1-\frac{u_2}{u_1}\right)\left(Q - Q(u_1 = 0)\right) + \ldots$$
$$+ \lambda_M\left(1-\frac{u_M}{u_{M-1}}\right)\left(Q - Q(u_{M-1} = 0)\right) \qquad (83)$$

Setzt man zunächst $u_1 = u_2 = \ldots\ldots = u_M$, so wird
$\frac{\partial Q(u_1)}{\partial t} = \lambda_1(1-u_1)Q(u_1)$, also $Q(u_1,\ldots u_1) = e^{-\lambda_1(1-u_1)t}$

Setzt man dann $u_2 = u_3 = \ldots\ldots u_M$, so resultiert gerade das Zweier-System

$$-\frac{\partial Q(u_1,u_2)}{\partial t} = \lambda_1(1-u_1)Q + \lambda_2(1-u_2/u_1)\left(Q - Q(u_1=0)\right),$$

das bereits behandelt wurde. Außerdem darf die Besetzungszahl eines Zustandes höchstens von denen der vorhergehenden abhängig sein, als Folge des fehlenden Ringschlusses. Das legt es nahe, folgenden Ansatz zu probieren:

$$Q = \prod_{i=1}^{M-1} \frac{1-(\lambda_1/\lambda_{i+1})u_M}{1-(\lambda_1/\lambda_{i+1})u_i}\, e^{-\lambda_1(1-u_M)t} \qquad (84)$$

der so gewählt ist, daß er auch für $u_k = u_{k+1} = \ldots\ldots = u_M$ noch richtige Ergebnisse liefert ($k=1,2,3,\ldots.M$). Die Richtigkeit dieser Annahme bestätigt man sofort durch Einsetzen von Gl.(84) in Gl.(83). Gl(84) setzt allerdings für $t = 0$ die Verteilung

$$Q_o = \prod_{i=1}^{M-1} \frac{1-\lambda_1 u_M/\lambda_{i+1}}{1-\lambda_1 u_i/\lambda_{i+1}}$$

voraus, also für $u_M=1$ gerade die stationäre Verteilung.

Für den Fall eines Systems ohne Ringschluß wird bei Abhängigkeit der λ_i von den Besetzungszahlen in der Form

$$\lambda_{i,k} = k\cdot\lambda_i \qquad (85)$$

$$-\frac{\partial Q}{\partial t} = \lambda_1(1-u_1)Q + \lambda_2(u_1-u_2)\frac{\partial Q}{\partial u_1} + \ldots\ldots + \lambda_M(u_{M-1}-u_M)\frac{\partial Q}{\partial u_{M-1}}$$

was zur Lösung führt:

$$Q = \exp\left\{-\lambda_1(1-u_M)t + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}u_1 + \ldots\ldots + \frac{\lambda_1}{\lambda_M}u_{M-1}\right\} \qquad (86)$$

wieder unter der Annahme einer für $t = 0$ stationären Verteilung für die Zustände 1,2....M-1. Diese Verteilung

unterliegt nicht einer zeitlichen Veränderung. Praktisch resultiert ein einfacher Strom vom Ausgangszustand O in den Endzustand M. Jede andere Verteilung führt zu schwersten mathematischen Komplikationen.
Mit einer stationären Verteilung für alle Zwischenzustände ergäbe sich auch jedes System, das Verzweigungen zuläßt, lediglich als Überlagerung einfacher Ströme.Hier wird also die Behandlung von Systemen ohne Ringschluß besonders einfach.

VI. Systeme mit Doppelbegrenzung.

Bei diesen liegt, anders als in Kap.IV, für bestimmte Zustände sowohl eine minimale als auch eine maximale Besetzungszahl vor.Es sei zunächst nur der Fall behandelt, wo diese Begrenzungen in jedem Zustand vorliegen.Außerdem sei der Einfachheit halber keine Ketten-Verzweigung angenommen.Man hat also solche Systeme vor sich, in denen nur beschränkte Warteschlangen möglich sind.In einem solchen Falle ist, wie bereits in Kap.IV,1 erwähnt,nur in Systemen mit Verlusten eine Separation der einzelnen Zustände möglich, und das auch nur insoweit, als jeder Zustand nur von den vorhergehenden abhängt.

1. Systeme mit Verlusten

In diesem Fall ist der Abfluß aus dem i-ten Zustand größer als der Zufluß in den (i+1)ten.Man wird dann mit der Gleichung für i = 1 beginnen und im stationären Fall erhalten(für $u_o=1$):

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1 u_1} = (1 - \lambda_1/\lambda_2) \cdot \sum_{n_1=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda_1 u_1}{\lambda_2}\right]^{n_1}$$

Alle Wahrscheinlichkeiten mit $n_1 \geq N_1$ sind Verlustwahrscheinlichkeiten, also

$$\left\{1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right\}\sum_{n_1=N_1+1}^{\infty}\left\{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right\}^{n_1} = \left\{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right\}^{N_1+1}$$

Für den Übergang in den Zustand 2 kommen alle Besetzungszahlen des Zustands 1 mit $1 \leq n_1 \leq N_1$ in Frage, also im stationären Fall nur:

$$\left\{1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right\}\sum_{n_1=1}^{N_1}\left\{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}u_1\right\}^{n_1} = \left\{1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right\}\left\{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}u_1\right\}\cdot\frac{1-(\lambda_1u_1/\lambda_2)^{N_1}}{1-(\lambda_1u_1/\lambda_2)}$$

Dann ergibt sich für den Zustand 2

$$\lambda_2\frac{u_2}{u_1}\left[1-\lambda_1/\lambda_2\right]\frac{\lambda_1u_1}{\lambda_2}\cdot\frac{1-(\lambda_1u_1/\lambda_2)^{N_1}}{1-(\lambda_1u_1/\lambda_2)}\cdot Q_2(u_1,u_2) =$$

$$\lambda_3\frac{1-\lambda_1/\lambda_2}{1-\lambda_1u_1/\lambda_2}\left[Q_2(u_1,u_2)-Q_2(u_1,0)\right]$$

und daraus

$$Q_2(u_1,u_2) = \frac{\lambda_3-\lambda_1\left[1-(\lambda_1u_1/\lambda_2)^{N_1}\right]}{\lambda_3-\lambda_1u_2\left[1-(\lambda_1u_1/\lambda_2)^{N_1}\right]}$$

$Q_2(u_1,u_2)$ hat also genau dieselbe Form wie $Q_1(u_1)$, wobei jedoch λ_1 durch $\lambda_1^{(1)}$ als Folge der Verluste ersetzt wurde. $\lambda_1 = \lambda_1^{(1)}$ in dem Falle, wo die Verlustwahrscheinlichkeit vernachlässigbar ist. Im Zustand 3 wird $Q_3(u_1,u_2,u_3)$ mit der Verlustwahrscheinlichkeit $(\lambda_1/\lambda_3)^{N_2+1}$ für den Zustand 2:

$$Q_3(u_1,u_2,u_3) = \frac{\lambda_4-\lambda_1^{(2)}}{\lambda_4-\lambda_1^{(2)}u_3}$$

wobei

$$\lambda_1^{(2)} = \lambda_1^{(1)} \left[1-(\lambda_1 u_2/\lambda_3)^{N_2}\right]$$

gesetzt wurde. Entsprechend ergeben sich auch die weiteren Funktionen Q_i. Die Gesamtfunktion ist dann als Produkt der Einzelfunktionen darstellbar:

$$Q = \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_1^{(i-1)}}{\lambda_{i+1} - \lambda_1^{(i-1)} \cdot u_i} \qquad (88)$$

Dabei wurde $\lambda_1 = \lambda_1^{(o)}$ gesetzt. $\lambda_1 \neq \lambda_1^{(i)}$ in all den Zuständen i, in denen Verluste auftreten und ist mit Gl.(67) identisch, wenn überhaupt keine Verluste auftreten.
Die Verluste während des Prozesses werden in das Ausgangsreservoir übernommen. Der Zustand O möge dabei unendlich große Kapazität haben. Solche Prozesse liegen z.B. in einer Telephonzentrale vor, wenn nur eine bestimmte Höchstzahl an Gesprächen vorgemerkt werden kann(s.etwa Chintschin[1]).

Das hier angedeutete Verfahren ist auch möglich, wenn nur aus bestimmten Besetzungszahlen eines Zustandes, etwa jedem zweiten, Übergänge möglich sind.

Es ist nochmals daran zu erinnern,daß der Zustand i bedeutet: i-te Stufe abgeschlossen. N_i ist also die maximale Zahl aller Objekte, die sich in der (i+1)-ten Stufe befinden bzw. auf diese warten. Um die Zahl der Wartenden anzugeben, muß die Kapazität der einzelnen Stufen gegeben sein,was im Allgemeinen auch der Fall sein dürfte.Damit ist auch der Fall behandelt, wo beschränkte Wartezahlen möglich sind.

---

[1] A.J.CHINTSCHIN:Mathematical Methods in the Theory of Queueing London: GRIFFIN 1960

2. Näherungslösungen für große Kapazitäten:

Sind die Kapazitäten der einzelnen Zustände groß, so ergibt sich aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen eine Näherungslösung für den stationären Fall, die einer Separation in Funktionen der einzelnen u_i entspricht.

$$Q \approx \prod_{i=1}^{n} \frac{1-\lambda_i/\lambda_{i+1}}{1-\lambda_i u_i/\lambda_{i+1}} \cdot \frac{1-[\lambda_i u_i/\lambda_{i+1}]^{N_{i+1}}}{1-[\lambda_i/\lambda_{i+1}]^{N_{i+1}}} \qquad (89)$$

Man überzeugt sich leicht, wie genau die Näherung ist, indem man den von u_i abhängigen Teil in die Gl(45) einsetzt. Wäre nämlich eine Separation möglich, so müßten nach den Ergebnissen des vorigen Kapitels folgende Bedingungen erfüllt sein (mit den dort definierten Größen Q_i):

1) $Q_i - Q_i(u_{i-1}=0) = \alpha_i (Q - Q(u_{i-1}=0))$

2) $\frac{Q_i - Q_i(u_{i-1}=0)}{u_{i-1}} \simeq \beta_i \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} Q_i$

wo α_i, β_i geeignet gewählte Konstanten sind. Beide Bedingungen sind gleich gut erfüllt, da

$$\frac{Q_i - Q_i(u_{i-1}=0)}{Q - Q(u_{i-1}=0)} = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}} \cdot \frac{Q_i - Q_i(u_{i-1}=0)}{u_{i-1} \cdot Q_i} = \frac{1-(\lambda_{i-1}u_{i-1}/\lambda_i)^{N_i}}{1-(\lambda_i u_i/\lambda_{i+1})^{N_i+1}}$$

Für $\lambda_i/\lambda_{i+1} = 1/2$ und $N_i=5$ beträgt dieser Quotient für $u_i=1$ 0,98, für $u_i=0$ 1, ist also schon nahezu konstant. Die Näherung ist also für große N_i und kleine λ_i/λ_{i+1} sicher sehr gut. Da noch α_i und β_i als Anpassungsparameter eingeführt wurden, ist die Näherung sicher sehr gut.

Setzt man alle Variable bis auf u_i gleich 1, betrachtet also als zeitliche Änderung lediglich die durch Gl.(45) gegebene, so kann man die gewonnene Gl.(89) auch auf andere Weise bekommen. Lösung für den einseitig begrenzten stationären Fall ist

$$Q^1 = \sum_{k_i=0}^{\infty} P_1(k_i) u_i^{k_i} = A_i \frac{1-\lambda_1/\lambda_{i+1}}{1-\lambda_1 u_i/\lambda_{i+1}}$$

nach Kap. IV, 6 dann aber auch

$$Q^2 = \sum_{k_i=0}^{\infty} P_2(N_i+1+k_i) u_i^{k_i} = B_i \frac{1-\lambda_1/\lambda_{i+1}}{1-\lambda_1 u_i/\lambda_{i+1}}$$

Dabei seien A_i und B_i noch geeignet zu wählende Konstanten. Es wird nun die Differenz aus beiden Größen derart gebildet, daß Wahrscheinlichkeiten gleicher Besetzungszahlen voneinander subtrahiert werden, also

$$P(N_i+1+k_i) = A_i P_1(N_i+1+k_i) - B_i P_2(N_i+1+k_i)$$

$$= A_i \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{i+1}}\right)^{N_i+1+k_i} - B_i \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{i+1}}\right)^{k_i} = \left[A_i \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{i+1}}\right)^{N_i+1} - B_i\right] \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{i+1}}\right)^{k_i},$$

wo A_i und B_i noch freie Parameter sind.

Für $B_i = A_i \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{i+1}}\right)^{N_i+1}$ wird dann $P(N_i+1+k_i) = 0$ für jedes $k_i \geq 0$, d.h. also gerade für den Fall der Doppelbegrenzung. Leider ist jedoch die aus den $P(k_i)$ gewonnene erzeugende Funktion

$$Q = A_i u_i^{N_i+1} Q^1 - B_i Q^2$$

nur noch eine Näherungslösung, nämlich gerade in der oben erwähnten Güte.(Gl.(89)). Die Näherung kommt dadurch herein, daß u_i eine Variable und keine Konstante ist, also auch bei der Gewinnung von $Q(u_i=0)$ aus $Q(u_i)$ mit berücksichtigt werden müßte.

Eine solche Zerlegung kann in Fällen nützlich sein, wo die λ_i in verschiedener Weise von den Besetzungszahlen abhängig sind, wie etwa $\lambda_{i,k}=k\cdot\lambda_i (k\leq M_i)$, $\lambda_{i,k}=M_i \lambda_i$ für $k \geq M_i$, wo M_i die Zahl der Bedienungsstellen in der

i-ten Stufe ist.

3. Matrixprobleme.

Bisher sind Systeme behandelt, deren Zustände unendlich viele oder zumindest große Besetzungszahlen zulassen. Es empfiehlt sich nun, Probleme, die für jeden Zustand nur endlich viele Besetzungszahlen zulassen, als Matrixsysteme zu behandeln, zumal solche mit einem Computer bequem zu lösen sind. In diesem Fall wird die Gleichung für die erzeugende Funktion lediglich als Kurzschrift eines für die einzelnen Wahrscheinlichkeiten bestehenden Gleichungssystems betrachtet, das sich sofort durch Koeffizientenvergleich nach den Potenzen der u_i zurückgewinnen läßt. Da für $u_o = u_1 = u_2 = \ldots\ldots = u_n = 1$ $\partial\Omega/\partial t = 0$ ist, verschwindet die Determinante der Koeffizienten der $P(k_1,\ldots\ldots k_n)$. Es existiert also eine stationäre Lösung. Nun sind $(N_1+1)(N_2+1)\ldots\ldots\ldots(N_n+1)$ Besetzungskombinationen möglich (einschl. der Null), so daß die Matrix der Koeffizienten ebensoviele Zeilen und Spalten hat. Nennen wir den Vektor der Wahrscheinlichkeiten (der eigentlich als Spaltenvektor geschrieben werden sollte)

$$\mathfrak{k} = (P(0), P(1,0\ldots\ldots0), \ldots P(0,0\ldots1), P(2,0\ldots0), P(1,1,0\ldots0) \ldots\ldots\ldots P(N_1\ldots\ldots\ldots N_n))$$

und die Koeffizientenmatrix $\mathfrak{A}$, so wäre im allgemeinen Fall zu lösen:

$$\frac{d\mathfrak{k}}{dt} = -\mathfrak{A}\mathfrak{k} \qquad (90)$$

Die Lösung eines solchen Systems lautet im Falle zeitunabhängiger λ_i:

$$\mathfrak{k} = \exp(-\mathfrak{A}t)\cdot\mathfrak{k}_0 \qquad (91)$$

wobei $$\exp(-\mathfrak{A}t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-\mathfrak{A}t)^k$$

- vorausgesetzt, daß all diese Matrizen existieren - gesetzt wurde. Dieses aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen stammende Ergebnis kann sofort durch Einsetzen verifiziert werden.

Im Falle zeitabhängiger λ_i wäre zu setzen

$$\mathfrak{x} = \exp\left[-\overline{\mathfrak{A}}\right] \cdot \mathfrak{x}_0$$

wobei $$\overline{\mathfrak{A}} = \left(\overline{a_{i,k}}\right) = \left(\int a_{ik}\,dt\right)$$

Der stationäre Fall existiert wegen $D(\mathfrak{A}) = 0$. Es ist also eine Komponente, z.B. $P(0)$ frei wählbar, nach der in bekannterweise aufgelöst wird. Diese ist dann durch die Normierungsbedingung $Q(1,1....1) = 1$ bestimmt.

Die Darstellung (91) sieht auf den ersten Blick sehr kompliziert aus, da offenbar unendlich viele Matrizen gebildet werden müßen, die dann aufzusummieren sind. Im Falle, wo $\mathfrak{A}$ nicht von der Zeit abhängt, empfiehlt sich eine Transformation des Vektors $\mathfrak{x}$ derart, daß die Matrix auf Hauptachsen transformiert erscheinen. Man geht dazu mittels einer Abbildung $\mathfrak{x} = \mathfrak{L}\mathfrak{y}$ des gesamten Raumes auf sich zu einem Koordinatensystems über, dessen Achsen $\mathfrak{z}_i$ durch die durch $\mathfrak{A}$ beschriebene Transformation bis auf einen konstanten Faktor μ_i in sich übergehen. Da die Matrizen $\mathfrak{A}$ in den vorliegenden Problemen nicht symmetrisch sind, werden diese Achsen auch nicht aufeinander senkrecht stehen, wie man leicht zeigen kann.

Geht man von dem System der Vektoren $\mathfrak{y}$ aus, führt dann die durch $\mathfrak{L}$ beschriebene Abbildung auf die Vektoren $\mathfrak{x}$ durch, transformiert diese mittels der Matrix $\mathfrak{A}$ und geht dann durch die zu $\mathfrak{L}$ inverse Abbildung $\mathfrak{L}^{-1}(\mathfrak{L}\mathfrak{L}^{-1} = \mathfrak{E}$, die Identität) wieder zum System der Vektoren $\mathfrak{y}$ über, so resultiert

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{L}\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{L}^{-1}\frac{d(\mathfrak{L}\mathfrak{x})}{dt} = \mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{L}\mathfrak{x} \qquad (92)$$

Laut Voraussetzung sollen bei der durch $\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{L}$ beschriebenen Transformation die Hauptachsen unverändert bleiben. Es ist also wegen $\mathfrak{x} = y_1\mathfrak{z}_1 + \cdots + y_N\mathfrak{z}_N$, $\frac{dy_i}{dt} = -\mu_i y_i$, d.h. die Matrix $\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{L}$ hat Diagonalform. Nun ist die Determinante $D(\mathfrak{A}) = 0$, d.h. es kommt der Eigenwert 0 unter den μ_i vor. Er sei mit μ_1 bezeichnet. Die ihm entsprechende Komponente ist gerade die stationäre, während alle anderen im unendlichen verschwinden sollten. Das setzt voraus, daß nur nicht-negative Eigenwerte auftreten dürfen. Diese setzen sich aus der Lösung der Gl. $D(\mathfrak{A}-\mu\mathfrak{E})=0$, die Matrix $\mathfrak{L}$ der Eigenvektoren aus den Lösungen von

$$(\mathfrak{A} - \mu_i\mathfrak{E})\,t = 0$$

zusammen. Man hat dann

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = -\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \mu_2 & \\ 0 & & \ddots\ \mu_N \end{pmatrix}\mathfrak{x}$$

Sei $\mathfrak{x} = (y_1, y_2, \ldots . y_N)$, so ist die Lösung dann

$$y_i = y_{0,i}\, e^{-\mu_i t}$$

also

$$\mathfrak{x} = (y_{0,1}e^{-\mu_1 t}, y_{0,2}e^{-\mu_2 t} \ldots . y_{0,N}e^{-\mu_N t})$$

Mittels $\mathfrak{L}\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ wird diese Lösung dann auf die ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten zurücktransformiert. Man sieht sofort, daß eine stationäre Lösung nur dann vorliegen kann, wenn sämtliche $\mu_i \geq 0$ (bzw. komplex mit positivem Realteil) sind.

Dieses Verfahren der Hauptachsentransformation läßt sich im Prinzip auch auf den Fall unendlicher Besetzungszahlen übertragen, wie die Quantenmechanik beweist, die ja viel mit solchen Eigenwertproblemen mit unendlichen Matrizen,

unendlich vielen Eigenwerten und Eigenvektoren zu tun hat.

Wie man aus der Definition der Zahl N ersieht, wird schon bei recht geringen Kapazitäten die Ordnung der Matrix $\mathcal{O}\mathcal{L}$ sehr groß, so daß man evtl. zu den im vorigen Paragraphen beschriebenen Näherungsmethoden übergehen wird. Das ist allerdings auch nur in beschränktem Maße möglich. Es gilt z.B. nicht für die am Schluß dieses Kapitels erwähnten kombinierten Systeme.
Man kann die Zahl der Gleichungen für die einzelnen Wahrscheinlichkeiten und damit auch die Ordnung der Matrix dadurch reduzieren, daß man von dem Problem innewohnenden Symmetrien Gebrauch macht. So ist ein System mit Doppelbegrenzung definitionsgemäß ein sowohl nach unten als auch nach oben begrenztes System. Angenommen, man hätte bereits die stationäre Lösung gefunden, so dürfte sich durch die Abbildung eines nach unten auf ein nach oben begrenztes System die Lösung nicht ändern. Daraus folgt für $\lambda_{n-i+2} = \lambda_i \quad (i = 1; .. n+1)$ daß die Lösung die folgende Beziehung erfüllen muß:

$$Q = Q(u_1, u_2 \dots u_n) = u_1^{N_1} u_2^{N_2} \dots u_n^{N_n} Q\left(\frac{1}{u_n}, \frac{1}{u_{n-1}} \dots \frac{1}{u_1}\right) \quad (93)$$

Dabei sind $N_1, N_2, \dots$ die maximalen Besetzungszahlen der einzelnen Zustände. $Q(1/u_n, \dots, 1/u_1)$ soll dabei bedeuten, daß in dem Ausdruck für Q lediglich u_1 durch $1/u_n, \dots$ u_n durch $1/u_1$ ersetzt wurde.
Diese Beziehung ist der mathematische Ausdruck für die folgende zwischen den einzelnen Wahrscheinlichkeiten bestehende Relation:

$$P(k_1, k_2 \dots k_n) = P(N_n - k_n, \dots, N_1 - k_1)$$

$(N_{n+1-i} = N_i, i = 1, \dots n+1)$
Man ersieht dies leicht aus der Beziehung

$$0 = \lambda_1(u_0 - u_1)\frac{Q_1 - Q_1(u_0=0)}{u_0} + \lambda_2(u_1 - u_2)\frac{Q_2 - Q_2(u_1=0)}{u_1}$$

$$+ \ldots\ldots + \lambda_{n+1}(u_n - u_0)\frac{Q_0 - Q_0(u_n=0)}{u_n}$$

wo die Q_i wieder aus Q durch Aufsummierung nur über N_i-1 Besetzungszahlen des i-ten Zustandes entstanden sind. Für $\lambda_{n+2-i} = \lambda_i$ wird

$$0 = \lambda_1(u_0 - u_n)\frac{Q_0 - Q_0(u_n=0)}{u_n} + \lambda_2(u_n - u_{n-1})\frac{Q_n - Q_n(u_{n-1}=0)}{u_{n-1}}$$

$$+ \ldots + \lambda_{n+1}(u_1 - u_0)\frac{Q_1 - Q_1(u_0=0)}{u_0}$$

Denkt man nun daran, daß bei der Abbildung eines nach oben begrenzten auf ein nach unten begrenztes System der Zustand $i \longrightarrow n+1-i$ derart abgebildet wird, daß ein gefüllter einem leeren Zustand entspricht (Umkehrung der Zeitrichtung), so folgt gerade die Behauptung.

Man hat somit für $Q(u_1 \ldots\ldots u_n)$ eine Funktionalgleichung gefunden, die sie erfüllen muß, um die eindeutige Lösung des stationären Problems zu sein.

4. Kanalsysteme.

Besonders wichtig ist für die Praxis der Fall eines sog. Kanalsystems, bei dem die Besetzungszahlen $k_1, k_2 \ldots k_n$ der Zustände lediglich Beschränkungen der Form $\sum k_i \leq k$ unterworfen sind. In diesem Fall wollen wir von einem System von k Kanälen sprechen. Es kann gezeigt werden, daß zur Beschreibung eines solchen Systems statt der bisherigen Variablen k sog. Kanal-Variable definiert werden können, die dem Problem angemessener sind.
Auf der Bedienungsseite wird die Beschränkung meist in der Zahl der Bedienungskanäle gegeben sein, die ein

Objekt passieren muß. Wie bei der Definition der Stufenmethode gezeigt wurde, kann der gesamte Bedienungsprozeß oft in eine Folge aufeinander folgender Stufen aufgeteilt werden, die vielleicht von derselben Bedienungskolonne verrichtet wird, so daß diese für den gesamten Prozeß gleichzeitig nur für eine bestimmte Höchstzahl von Objekten bereitsteht.

Auch auf der Ankunftsseite kann ein solches Kanalsystem festgestellt werden. Es war bisher noch keine Entscheidung darüber getroffen, wann der fiktive Ankunftsprozeß beginnen soll. Läßt die Verteilung des Intervalls zwischen zwei verschiedenen Ankünften eine Zerlegung in eine einzelne Kette mit Übergangswahrscheinlichkeiten $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ zu, was damit gleichwertig ist, daß die Laplace-Transformation von der Form

$$\prod \frac{\lambda_i}{\lambda_i + s}$$

ist, so wird der Beginn des Ankunftsprozesses des n-ten Objektes am Ende des Ankunftsprozesses des (n-1)ten festgelegt, d.h. dann, wenn das (n-1)te wirklich da ist. Im Falle eines Ankunftsprozesses, der nur jeweils ein Objekt zuläßt, sind oft auch mehrere Kanäle mit bestimmter Wahrscheinlichkeit betretbar. Wenn allerdings einer eingeschlagen ist, sind die anderen gesperrt. Es ist dies der speziellste Fall eines Parallelsystems. Sind unabhängig voneinander in Ankunftsprozessen mehrere Kanäle gleichzeitig betretbar, so bedeutet das den Fall, daß jeweils die Zeit zwischen zwei Ankünften einer bestimmten Gruppe von Objekten gewählt wird, z.B. zwischen jedem zweiten, dritten usw. Auf diese Weise kann man den Kreis der Ankunftsverteilungen, die mit dieser Methode zu berechnen sind, ganz erheblich erweitern.

Für ein Einkanalsystem mit Ringschluß wird dann

$$Q = \sum_{\Sigma k_i \leq 1} P(k_1, k_2 \ldots\ldots k_n) u_1^{k_1} \cdots u_n^{k_n} \quad (94)$$

die erzeugende Funktion. Die Gl.(77) wird nun besonders einfach:

$$Q_1 = P(0,0\ldots.0),\ Q_{i+1} - Q_{i+1}(u_i=0) = Q - Q(u_i=0) = \left(\frac{\partial Q}{\partial u_i}\right)_0 u_i \ (i>0),$$

wo $Q(u_i)$ bedeutet, daß alle Variablen außer u_i gleich 0 sind.
Diese Eigenschaft macht es möglich, daß $u_i = u^i$, d.h. als Potenz einer einzigen "Kanalvariablen" u gewählt werden darf, ohne daß die Funktion Q an Informationswert betreffs der einzelnen Wahrscheinlichkeiten einbüßt.

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial u_i}\right)_0 = \frac{1}{i!}\left(\frac{\partial^i Q}{\partial u^i}\right)_0, \text{ also wird aus Gl.(77)}$$

$$(1-u)\left[\lambda_1 Q(0) + \lambda_2\left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right)_0 u + \frac{\lambda_3}{2!}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial u^2}\right)_0 u^2 + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_n u^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\partial^{n-1} Q}{\partial u^{n-1}}\right)_0\right] + \frac{\lambda_{n+1}}{n!}(u^n - 1)\left(\frac{\partial^n Q}{\partial u^n}\right)_0 = \begin{cases} \text{stationäre L.} \\ \text{sonst} \end{cases} \quad (95)$$

Man sieht übrigens, daß im Falle $\lambda = \lambda_i = \ldots\ldots \lambda_n$ für $n \to \infty$ links gerade die Taylor-Entwicklung der Funktion $\lambda(1-u)Q$ steht. Das bedeutet, daß man lösen müßte

$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\lambda(1-u)Q$, also genau die Gleichung des einfachen Stromes. Diese Lösung ist nicht verwunderlich, da ja der einfache Strom eine exponentielle Verteilung zwischen den Ankünften zweier Objekte (hier: bis zum Erreichen eines neuen Zustandes) voraussetzt, inhaltlich dem vorliegenden also völlig analog. Die stationäre Lösung läßt sich sofort ablesen. Sie lautet nach Normierung

$$\varrho = \frac{\sum u^i/\lambda_{i+1}}{\sum 1/\lambda_{i+1}}$$

Die zeitabhängige Lösung soll durch Anwendung der im vorigen Paragraphen beschriebenen Matrixmethode ermittelt werden. Die charakteristische Gleichung lautet hier

$$\begin{vmatrix} \lambda_1-\mu & & & & -\lambda_{n+1} \\ -\lambda_1 & \lambda_2-\mu & & & \\ & -\lambda_2 & \lambda_3-\mu & & \\ & & -\lambda_3 & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & -\lambda_n & \lambda_{n+1}-\mu \end{vmatrix} = 0 \qquad (96)$$

$$= (\lambda_1-\mu)(\lambda_2-\mu)\cdots(\lambda_{n+1}-\mu) - \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n+1}$$

Die zugehörigen Eigenwerte seien $\mu_1, \mu_2 \cdots\cdots, \mu_{n+1}$.
Sie sind besonders einfach in dem Falle anzugeben, wo alle $\lambda_i = \lambda$ sind.
Dann ist nämlich $\mu_{k+1} = 1 - \exp\left(2\pi i \cdot \frac{k}{n+1}\right)$ (97)
$\exp\left[2\pi i \frac{k}{n+1}\right]$ sind die n+1 Einheitswurzeln, die in der komplexen Ebene ein regelmäßiges Vieleck bilden. Der Realteil von μ_{k+1} ist also stets ≥ 0.

Allgemein können über die Lage der Eigenwerte die folgenden Aussagen gemacht werden: Die λ_i werden der Größe nach geordnet. Die so numerierten Werte werden, mit dem kleineren Wert begonnen, mit $l_1, l_2 \ldots l_n$ bezeichnet. Sie brauchen nicht notwendig von einander verschieden sein. Dann sei $y = (1-\mu/l_1)(1-\mu/l_2)\ldots(1-\mu/l_n) - 1 = 0$
y ist für $\mu < 0 :> 0$, wird dann für $\mu_1 = 0 := 0$, d.h. hier liegt eine Lösung vor. Für $0 < \mu < l_2$ ist y negativ, d.h. es gibt dort keine 0-Stellen. In $l_2 < \mu < l_3$ ist $y > -1$, d.h. es sind Eigenwerte möglich. Es tritt dabei jedoch nur

eine gerade Zahl von Eigenwerten auf. Für $l_3<\mu<l_4$ ist $y < -1$, also kein Eigenwert. Für $l_4 < < l_5$ ist $y > -1$, also Eigenwerte möglich. Allgemein liegt in $l_{2\nu-1}<\mu<l_{2\nu}$ kein Eigenwert, in $l_{2\nu}<\mu<l_{2\nu+1}$ dagegen 0 oder eine gerade Anzahl. Ist n gerade, so liegt oberhalb l_n eine ungerade Zahl von Eigenwerten, ist n ungerade, keiner.

Die Eigenvektoren lauten im allgemeinen Fall:

$$C^{(k)} = \left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{1-\mu_k/\lambda_2}\cdot\frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_{n+1}}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-\mu_k/\lambda_{j+1}}\right) \quad (98)$$

Dann wird

$$P_0 = \frac{1}{\lambda_1}\sum_{k=1}^{n} y_{k,0}\, e^{-\mu_k t}$$

$$u^{\ell}P_{\ell} = \frac{1}{\lambda_{\ell+1}}\sum_{k=1}^{n} y_{k,0}\prod_{j=1}^{\ell}\frac{u}{1-\mu_k/\lambda_{j+1}}\, e^{-\mu_k t} \quad (\ell=1,2,\ldots n)$$

$$Q = \sum_{k=1}^{n} y_{k,0}\cdot e^{-\mu_k t}\left[\frac{1}{\lambda_1} + \sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\lambda_{\ell+1}}\prod_{j=1}^{\ell}\frac{u}{1-\mu_k/\lambda_{j+1}}\right] \quad (99)$$

Dies Ergebnis wird besonders einfach, wenn alle $\lambda_i = \lambda$. Dann ist nämlich $e^{-\mu_k t} = \exp\left[-\lambda t(1-\cos\frac{2\pi k}{n+1})\right]\left[\cos(\lambda t\sin\frac{2\pi k}{n+1}) - i\sin(\lambda t\sin\frac{2\pi k}{n+1})\right]$

$$Q = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} y_{k,0}\, e^{-\mu_k t}\,\frac{1-u^{n+1}}{1-u\exp\left(-2\pi i\,\frac{k}{n+1}\right)} \quad (100)$$

Für $n \longrightarrow \infty$ ist

$$Q = \frac{1}{\lambda}\int_0^{2\pi}\left\{y_0(\varphi)\exp\left[-\lambda t(1-e^{i\varphi})\right]/(1-ue^{i\varphi})\right\}d\varphi$$

und stationär $Q = \frac{1}{\lambda(1-u)}\cdot y_0(\varphi)$ ist dabei eine durch die Anfangsbedingungen für t = 0 gegebene Funktion.

Beispiele:

n = 2 Eigenwerte $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \lambda_1 + \lambda_2$

Eigenvektoren $c_1 = (1, \lambda_1/\lambda_2)$, $c_2 = (1,-1)$

Man überzeugt sich leicht, daß nur im Falle $\lambda_1=\lambda_2$ die beiden Vektoren aufeinander senkrecht stehen, also ein ebenes Cartesisches Koordinatensystem bilden. Im allgemeinen Fall hat man eine affine Ebene.

Die Lösungen lauten dann:

$$P_o = y_{1,o}+y_{2,o}\ e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

$$P_1 = y_{1,o}\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - y_{2,o}\ e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

$n = 3$

Eigenwerte: $\mu_1 = 0$, $\mu_{2,3} = \frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3}{2}\right)^2 - \lambda_1\lambda_2}$

Man erhält dann für $\lambda_3 < \lambda_1+\lambda_2-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$, zwei reelle Eigenwerte, für $\lambda_3 > \lambda_1+\lambda_2-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$ zwei konjugiert komplexe Eigenwerte mit positivem Realteil.
Für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ sind die Eigenwerte

$$\mu_1 = 0, \mu_{2,3} = \lambda\left[-\frac{3}{2} \pm i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

oder, was dasselbe ist,

$$\mu_1 = o, \mu_{2,3} = \lambda\left[1+ \cos\ \frac{2\pi}{3} \pm i \sin \frac{2\pi}{3}\right]$$

Im Falle $\lambda_3 = \lambda_1+\lambda_2$ ist $\mu_1 = 0, \mu_{2,3} = \lambda_1+\lambda_2 \pm i\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$

$$c_1 = \left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$$

$$c_{2,3} = \left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{-\lambda_1 \pm i\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2)}, \frac{-\lambda_2 \pm i\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2}\right)$$

daraus folgt:

$$P_0 = \frac{y_{1,0}}{\lambda_1} + \frac{y_{2,0}}{\lambda_1} \cdot 2e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \cos\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,t - \frac{y_{3,0}}{\lambda_1} 2e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \sin\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,t$$

$$P_1 = \frac{y_{1,0}}{\lambda_2} - \frac{2e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2)} \left\{ \left[y_{2,0}\lambda_1 + y_{3,0}\sqrt{\lambda_1\lambda_2} \right] \cos\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,t + \left[y_{2,0}\sqrt{\lambda_1\lambda_2} - y_{3,0}\lambda_1 \right] \sin\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,t \right\}$$

$$P_2 = \frac{y_{1,0}}{\lambda_1+\lambda_2} - \frac{2e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2)} \left\{ \left[y_{2,0}\lambda_2 - y_{3,0}\sqrt{\lambda_1\lambda_2} \right] \cos\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,t - \left[y_{2,0}\sqrt{\lambda_1\lambda_2} + y_{3,0}\lambda_2 \right] \sin\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,t \right\}$$

Der einfachste Fall zweier aufeinander folgender Kanäle sei noch berechnet, nämlich der von zwei Zuständen, die beide nur einfach besetzt werden können:

$$P'(0,0) = -\lambda_1 P(0,0) + \lambda_3 P(0,1)$$
$$P'(1,0) = \lambda_1 P(0,0) - \lambda_2 P(1,0) + \lambda_3 P(1,1)$$
$$P'(0,1) = \lambda_2 P(1,0) - (\lambda_1 + \lambda_3) P(0,1)$$
$$P'(1,1) = \lambda_1 P(0,1) - \lambda_3 P(1,1) \ ,$$

für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

lauten die Eigenwerte $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \lambda$, $\mu_3 = \lambda(2+i)$, $\mu_4 = \lambda(2-i)$

und die Eigenvektoren $c_1 = (1,2,1,1)$

$c_2 = (1,0,0,-1)$

$c_3 = \left(\frac{1-i}{2}, i, -1, \frac{1-i}{2} \right)$

$$c_4 = \left(\frac{1+i}{2},\ i,\ -1,\ \frac{1+i}{2} \right)$$

Daraus ergeben sich die einzelnen Wahrscheinlichkeiten

$$P(0,0)=y_{1,o}+y_{2,o}e^{-\lambda t}+\left[(y_{3,o}+y_{4,o})\cos\lambda t+(-y_{3,o}+y_{4,o})\sin\lambda t\right]e^{-2\lambda t}$$

$$P(1,0)=2y_{1,o}+\left[(-2y_{4,o})\cos\lambda t+(2y_{3,o})\sin\lambda t\right]e^{-2\lambda t}$$

$$P(0,1)=y_{1,o}+\left[(-2y_{3,o})\cdot\cos\lambda t+(2y_{4,o})\cdot\sin\lambda t\right]e^{-2\lambda t}$$

$$P(1,)=y_{1,o}-y_{2,o}e^{-\lambda t}+\left[(y_{3,o}+y_{4,o})\cos\lambda t+(y_{3,o}+y_{4,o})\sin\lambda t\right]e^{-2\lambda t}$$

Man beachte die Komplementarität der Wahrscheinlichkeiten P(0,0) und P(1,1), während P(1,o) und P(0,1) zu sich selbst komplementär sind.

Für $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda$ und $\lambda_2 = 2\lambda$ lauten die Eigenwerte $\mu_1 = 0, \mu_2 = \lambda, \mu_3 = \frac{\lambda}{2}(5 \pm i\sqrt{7})$.

Während sich dies System im stationären Fall in zwei Dreiecksysteme mit den Übergangswahrscheinlichkeiten λ aufspalten läßt, (wovon bei den graphischen Verfahren Gebrauch gemacht wird), gilt das im zeitabhängigen Fall nicht, da die Konvergenz gegen die stationäre Lösung völlig verschieden verläuft.

5. Parallel geschaltete Kanäle

Sind die Beschränkungsgleichungen eines n-Stufen-Systems $\sum k_i \leq N$, wo N eine natürliche Zahl > 1 ist, so kann dieses durch N parallel geschaltete Kanäle ersetzt werden mit den Kanal-Variablen $u_1, u_2 \ldots\ldots u_N$. Die Frage ist lediglich, wie die Präferenzen $\pi_1, \pi_2, \ldots\ldots \pi_N$ hinsichtlich dieser einzelnen Kanäle aussehen. Häufig wird es so sein, daß ein Objekt, das auf einen vollen Kanal trifft, auf die noch freien Kanäle ausweicht, so daß statt der absoluten Präferenzen $\pi_1, \pi_2, \ldots\ldots \pi_N$ bedingte Präferenzen für die noch freien Kanäle auftreten. Ist etwa Kanal 1 besetzt, so lauten die Präferenzen für die übrigen Kanäle $\pi_2/\pi, \pi_3/\pi, \ldots \pi_N/\pi, \left(\pi = \sum_{i=2}^{N} \pi_i\right)$

Diese sind offenbar von den ursprünglichen verschieden. Ist das Parallelsystem so geartet, daß zwar alle Kanäle mit Präferenzen $\pi_1, \pi_2, \ldots\ldots$ betretbar sind, für die gemeinsame Besetzungszahl aber eine obere Schranke 1 vorhanden ist, kommt man mit einer einzigen Kanalvariablen aus. Die Zahl der Zustände in den einzelnen Kanälen sei $k_1, k_2, \ldots\ldots$

Die Gleichung für die erzeugende Funktion lautet dann:

$$-\frac{\partial Q}{\partial t} = (1-v)\left[\pi_1 \lambda_1 Q(0) + \lambda_2 \left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_0 v + \ldots + \frac{\lambda_{k_1}}{(k_1-1)!}\left(\frac{\partial^{k_1-1} Q}{\partial v^{k_1-1}}\right)_0 v^{k_1-1}\right]$$

$$+ \frac{\lambda_{k_1+1}}{k_1!}\left(\frac{\partial^{k_1} Q}{\partial v^{k_1}}\right)_0 (v^{k_1}-1) + (1-v^{k_1+1})\pi_2 \lambda_1 Q(0) +$$

$$v^{k_1+1}(1-v)\left[\frac{\lambda_{k_1+2}}{(k_1+1)!}\left(\frac{\partial^{k_1+1} Q}{\partial v^{k_1+1}}\right) + v\frac{\lambda_{k_1+3}}{(k_1+2)!}\left(\frac{\partial^{k_1+2} Q}{\partial v^{k_1+2}}\right)_0 + \ldots\right]$$

$$+ \frac{\lambda_{k_1+k_2+1}}{(k_1+k_2)!}\left(\frac{\partial^{k_1+k_2} Q}{\partial v^{k_1+k_2}}\right)_0 (v^{k_1+k_2}-1) + (1-v^{k_1+k_2+1})\pi_3 \lambda_1 Q(0) + \ldots$$

Deren stationäre Lösung lautet:

$$Q_{st} = Q(0)\left[\frac{1}{\pi_1\lambda_1} + \frac{v}{\lambda_2} + \frac{v^2}{\lambda_3} + \cdots + \frac{v^{k_1}}{\lambda_{k_1+1}} + \frac{\pi_2}{\pi_1}\left(\frac{v^{k_1+1}}{\lambda_{k_1+2}} + \cdots + \frac{v^{k_1+k_2}}{\lambda_{k_1+k_2+1}}\right) + \frac{\pi_3}{\pi_1}\left(\cdots\right) + \cdots\right.$$

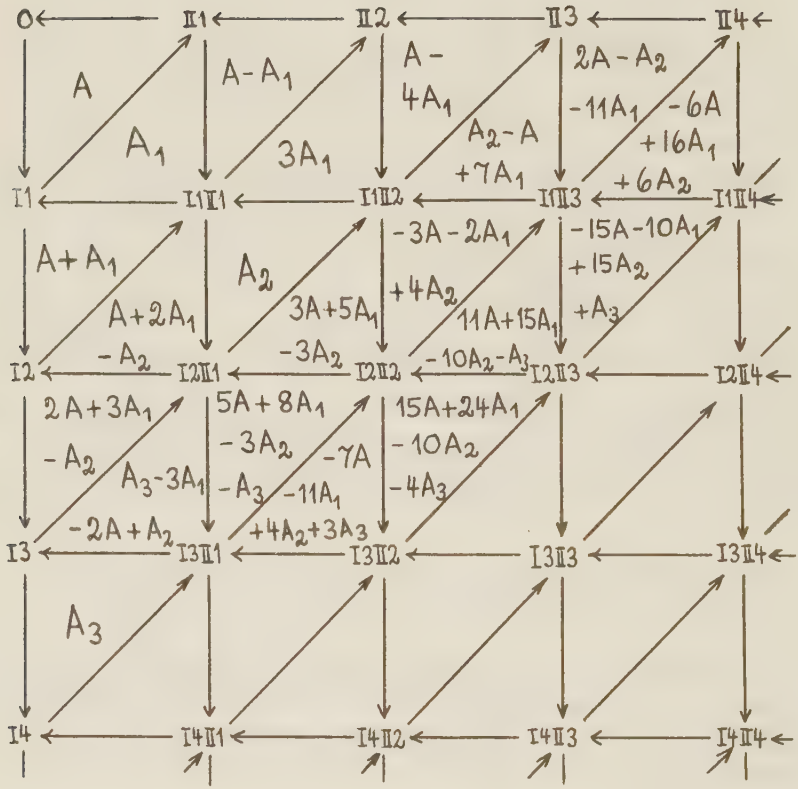
Q(0) folgt dann aus der Normierungsbedingung für v= 1. Man sieht übrigens, daß dieses System einem Einkanalproblem mit entsprechend abgeänderten Übergangswahrscheinlichkeiten äquivalent ist.Lediglich in dem Falle, wo ein solches Ausweichen auf andere Kanäle nicht möglich ist, die Entscheidung des Objektes für einen bestimmten Kanal also unabhängig davon ist, ob sich dieser dann als besetzt oder unbesetzt erweist, kann man von unabhängigen Kanälen sprechen. Die Q-Funktion ist dann lediglich eine Überlagerung von Einkanal-Funktionen, also $Q=Q_1+Q_2+\ldots.+Q_N$. Da die Variablen $u_1, u_2, \ldots.. u_N$ voneinander unabhängig sein sollen, kann man alle bis auf eine 0 setzen und erhält so

$$Q = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{\pi_i\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}u_i + \cdots.. + \frac{1}{\lambda_n}u_i^{n-1} + \frac{1}{\lambda_{n+1}}u_i^n\right]$$

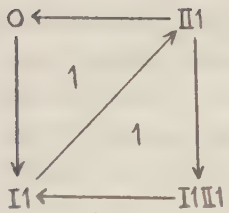
Die oben genannte Beziehung war nur gültig, wenn ein Ausweichen auf andere Kanäle nicht möglich war. Ist das unmöglich, so sehen die Gleichungen erheblich komplizierter aus.

6. Graphische Verfahren.

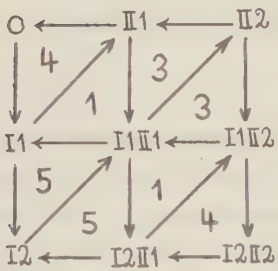
Man kann stationäre Lösungen kleinerer Systeme auch graphisch angeben. Dazu werden die möglichen Kombinationen von Besetzungszahlen aufgetragen und die infrage kommenden Übergänge durch Pfeile angedeutet. Der Einfachheit halber wird sich beschränkt auf gleiche λ.Nur in den Fällen werden verschiedene λ angenommen, wo sich Systeme



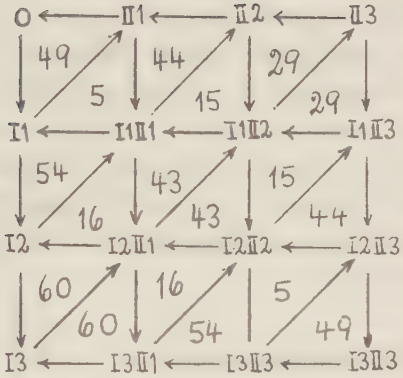
DARSTELLUNG 1A



N=1



N=2



N=3

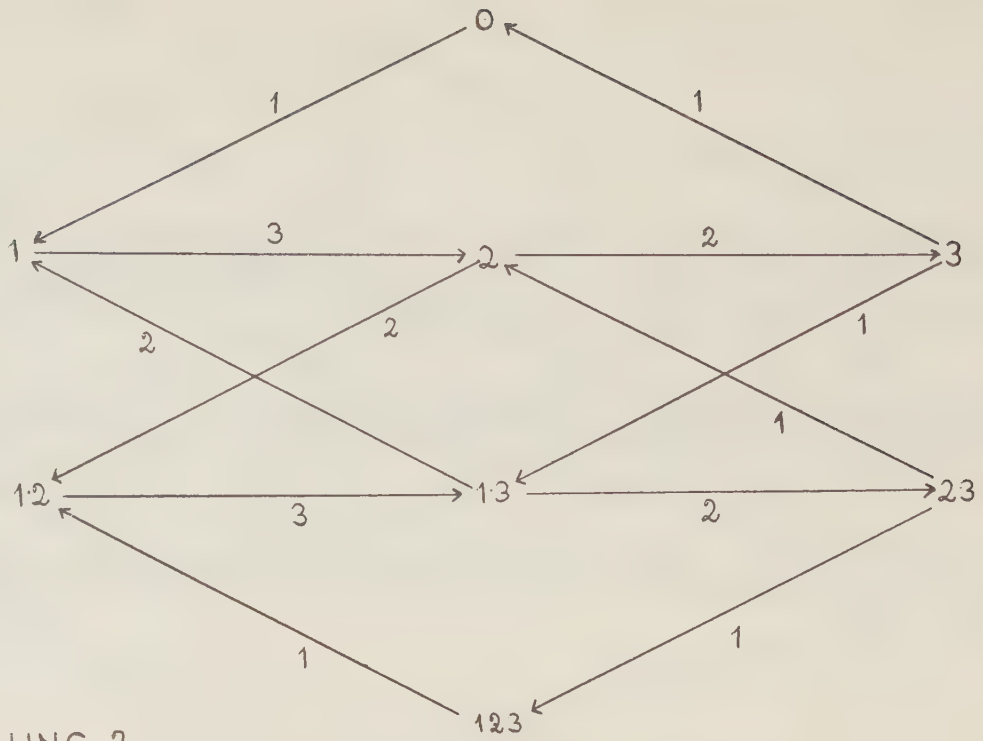
N=4

DARSTELLUNG 1B

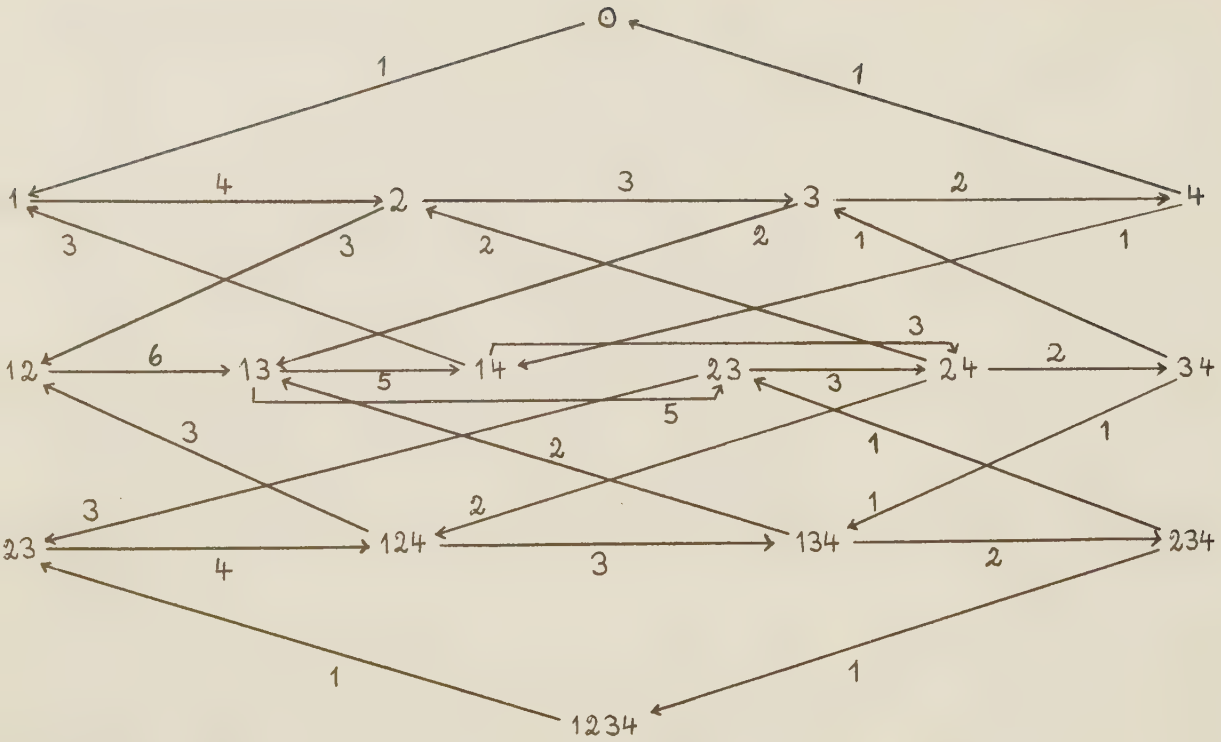
durch Addition aus Teilsystemen aufbauen. In all diesen Fällen kann man die Symmetrien von Systemen mit Doppelgrenzung ausnutzen, ferner die stationäre Eigenschaft, daß in jede Kombination genau so viele Objekte hinein, wie herausfließen. Die Summe aller Einheiten, die an den Pfeilen vermerkt sind (Zufluß positiv, Abfluß negativ) muß also 0 sein. Sind alle gleich, so ist auch die Gleichheit aller von einer Kombination ausgehenden Pfeileinheiten, gleichzeitig Maß für die Häufigkeit dieser Kombination, zu fordern.

Zweistufenproblem.

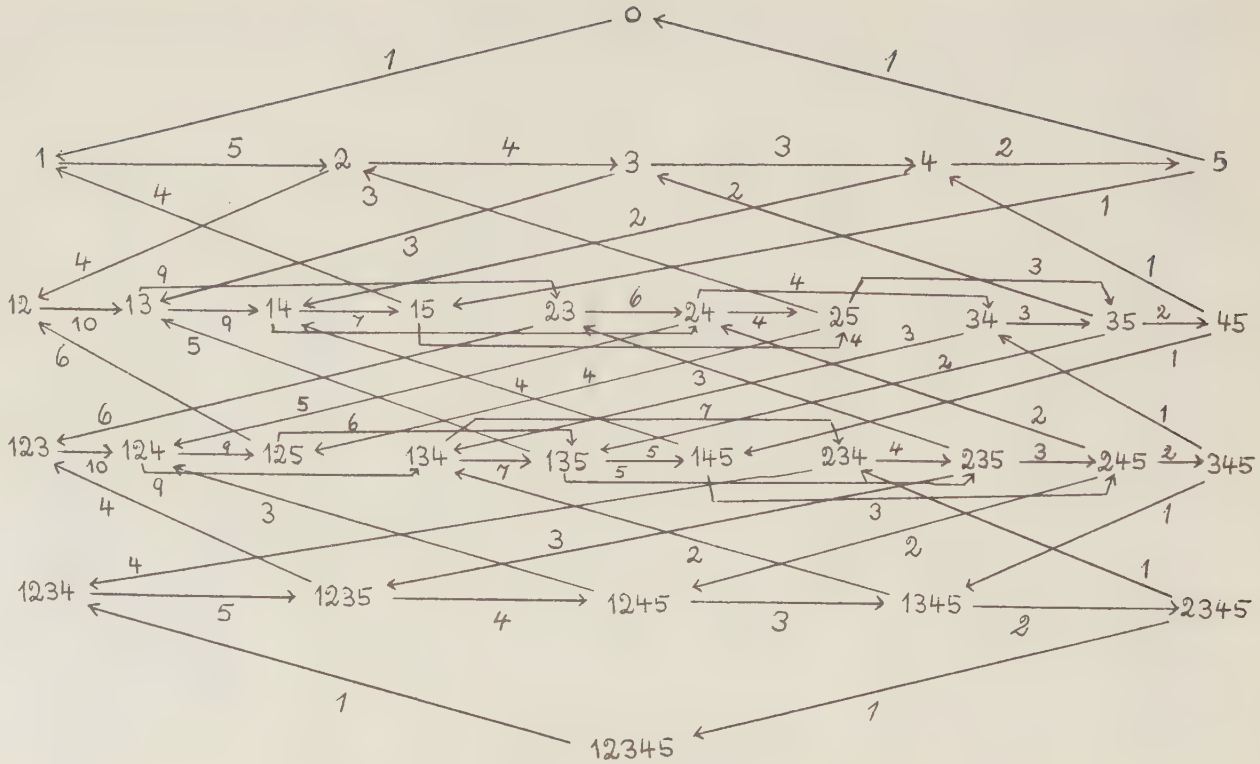
Dazu siehe die Darstellung 1. Man kann jeden Pfeil so in 2 Komponenten zerlegen, daß geschlossene Dreiecke entstehen. Beginnt man etwa bei der Kombination 0, so fliessen A Einheiten hinein und heraus. Das ist auch gleich der Häufigkeit der Kombination 0. Man wird dann dem aus 0,I1, II 1, gebildeten Dreieck die Zahl A zuordnen. Hat I 1 die Häufigkeit $A + A_1$, so kann man dem Dreieck I1-III -IIII die Zahl A_1 zuordnen. Da III die Häufigkeit A hat, so trägt der Pfeil von III nach I1 III ebenso wie der von III nach 0 die Zahl A. Dem Dreieck III-I1 III -II2 ist dann die Zahl $A - A_1$ zuzuordnen. So ergeben sich also alle weiteren Dreiecke sukzessiv, wobei notfalls neue Zahlen A_i eingeführt werden. Der Übersichtlichkeit halber werde zunächst angenommen, daß beide Zustände gleiche Kapazität N haben. Dann erhält man ein Quadrat. Aus der Spiegelbildlichkeit betreffs der Hauptdiagonalen IN-IIN folgen dann die Zahlen A_i. Diese Zahlen bleiben auch erhalten, wenn die Besetzungszahlen voneinander verschieden sind, so daß also bestimmte Dreiecke gestrichen werden müssen. Die Zahlenwerte sind für gleiche Besetzungszahlen 2,3,4 ange-



DARSTELLUNG 2



DARSTELLUNG 3



DARSTELLUNG 4

geben. Ihre Ausdehnung auf höhere Besetzungszahlen ist nach dem angegebenen Verfahren evident. Recht einfache Ergebnisse erhält man,wenn man gleiche Häufigkeit für alle Kombinationen voraussetzt und nach den Übergangswahrscheinlichkeiten sucht. Diese müssen für alle Pfeile auf der Peripherie der Darstellung halb so groß wie für solche im Inneren sein. Also: betrachtet man die Pfeile als das Wesentliche, so erscheint ein solches System aus lauter einzelnen Dreiecksystemen aufgebaut.

Mehrstufenprobleme bei einfacher Besetzung.

Die Darstellungen 2,3,4 zeigen die Ergebnisse für 3,4,5 Stufen mit maximal einfacher Besetzung für jeden Zustand. Die Zahlen an den Pfeilen ergeben sich in den betrachteten Fällen durch einfache Kombination aus Binominalkoeffizienten, doch ist der Zusammenhang umso übersichtlicher, mit je mehr Stufen man zu tun hat. Einige Ergebnisse sollen hier ohne Beweis referiert werden. Sei n die Gesamtzahl der Stufen, so gilt, wenn man die Häufigkeit 1 für die Kombination 0 voraussetzt:

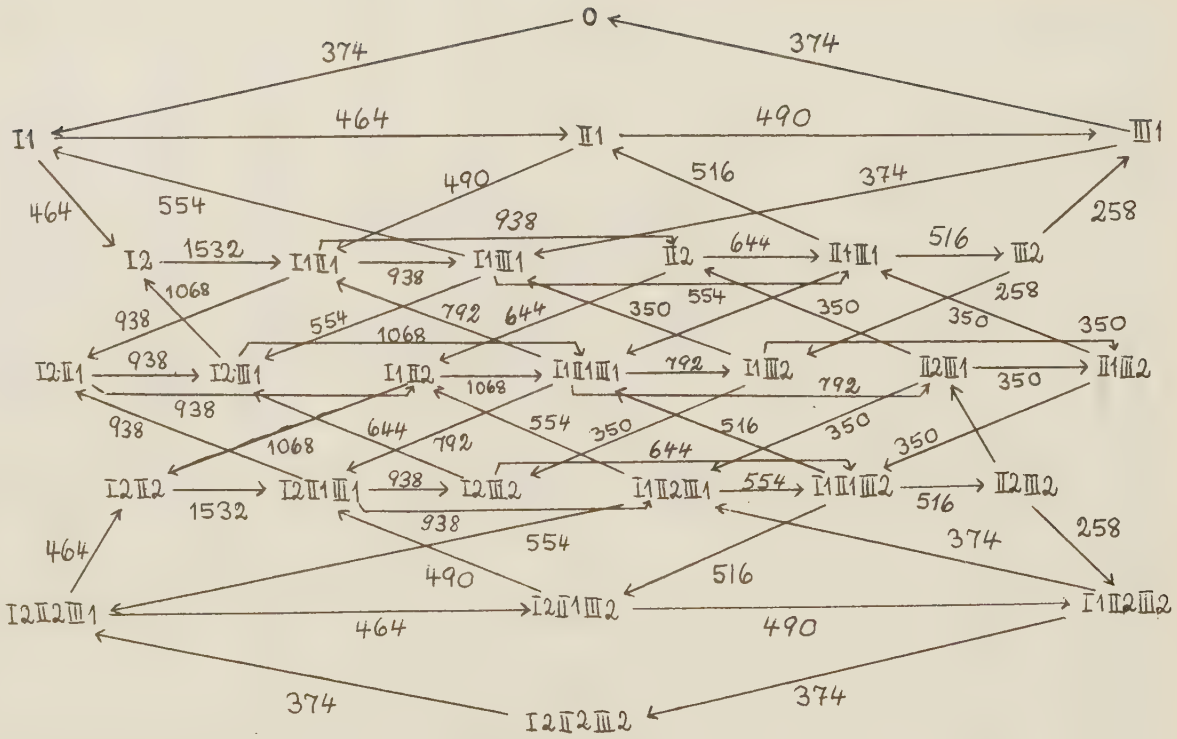
Häufigkeiten $\binom{n}{1} - \binom{k-1}{1}$,daß lediglich 1 Objekt im Zustand k

$\binom{n}{2} - \binom{k-1}{2}$,daß 1 Objekt im Zustand 1 und ein weiteres im Zustand $k > 1$

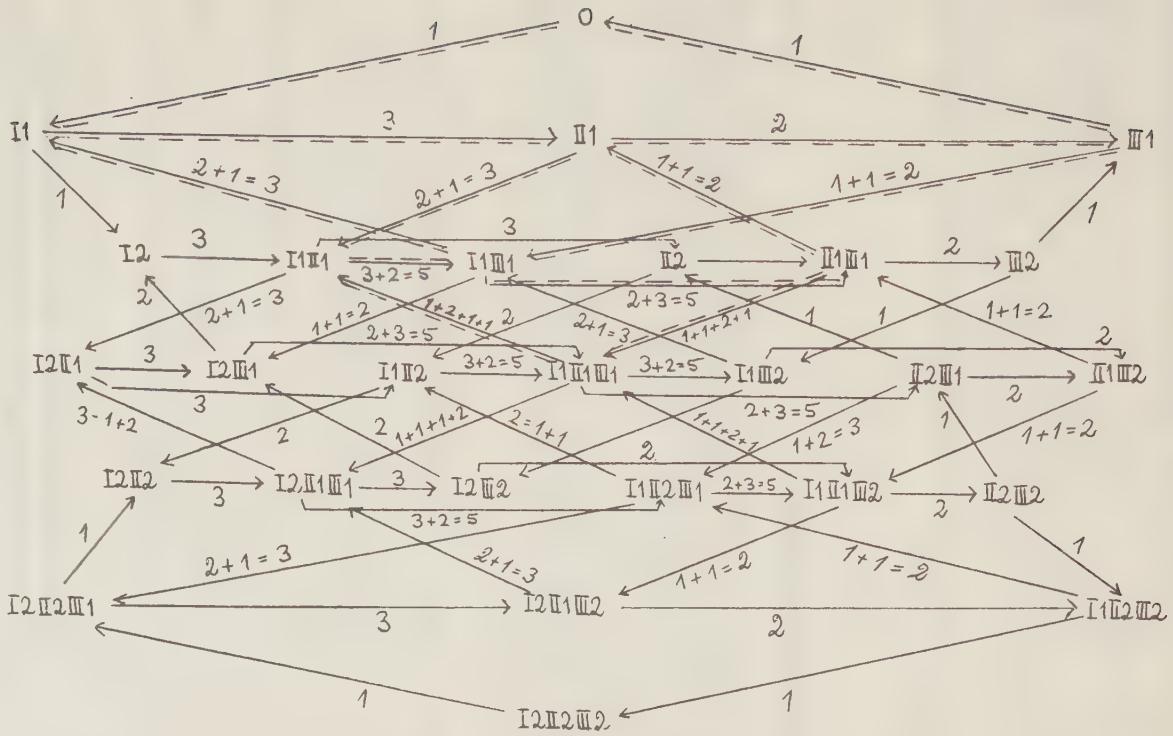
allgemein

$\binom{n-r+1}{2} - \binom{k-r}{2}$,daß 1 Objekt im Zustand r, ein weiteres im Zustand $k > r$

$\binom{n+r+1}{3} - \binom{k-r}{3}$,daß 1 Objekt im Zustand r, 1 im Zustand r+1, ein weiteres im Zustand $k > r + 1$.



DARSTELLUNG 6



DARSTELLUNG 7

Die gleichen Häufigkeiten gelten für die komplementären Kombinationen.
Die letzten beiden Darstellungen geben ein System von drei Zuständen, die jeweils doppelt besetzt werden können. Die Darstellung 6 gibt den Fall, daß alle λ gleich sind, die Darstellung 7 den Fall, daß das System durch Überlagerung aus Teilsystemen, die jeweils einmal besetzt werden können, gewonnen wird.

7. Kombinierte Systeme.

Die Überlegungen sind inzwischen schon so weit gediehen, daß auch kurz die Problematik der in diesem Zusammenhang schwierigsten stationären Systeme aufgezeigt werden kön - nen, nämlich:
Sie sollen sowohl Zustände enthalten, die nur eine endliche Besetzungszahl zulassen, wie auch solche mit unendlicher Kapazität.

Solange man sich im Gültigkeitsbereich der Gl.(89) be - wegt, ist dieses Problem mit dieser Gleichung bereits erledigt, wobei man lediglich bei den Zuständen i mit unendlicher Kapazität zur Grenze $N_i \longrightarrow \infty$ überzugehen hat. Dieses Verfahren versagt jedoch in solchen Fällen, wo es Zustände mit solch niedriger Besetzungszahl gibt, daß Gl.(89) nicht mehr zutrifft, ebenso aber wegen der unendlichen Kapazität bestimmter Zustände die Matrix-Methode zu schwerfällig wird.
Als einfachstes Beispiel dieser Art sei ein System genannt, in dem der erste Zustand unendliche Kapazität besitzt, der zweite aber nur eine einfache Besetzung zuläßt. In diesem Fall wird man die gesuchte erzeugende

Funktion Q in der Form $Q=Q_1(u_1)+u_2Q_2(u_1)$ darstellen können, wo Q_1 und Q_2 lediglich von u_1, aber nicht mehr von u_2 abhängen.
Man erhält dann das folgende Gleichungssystem

$$-\frac{\partial Q_1}{\partial t} = \lambda_1(1-u_1)+\lambda_2 Q_1-\lambda_3 Q_1-\lambda_2 Q_1(0)$$

$$-\frac{\partial Q_2}{\partial t} = \lambda_1(1-u_1)+\lambda_3 \cdot Q_2-\frac{\lambda_2}{u_1}\, Q_1+\frac{\lambda_2}{u_1} Q_1(0) \qquad (103)$$

Solange $Q_1(0)$ als klein angenommen werden kann, kann dieses Problem als Matrixaufgabe behandelt werden. Die Eigenwerte sind dann Funktionen von u_1, im Allgemeinen aber nicht nur von ganzzähligen Potenzen als Folge der Vernachlässigung von $Q_1(0)$ (oft) abhängig. Hier führen häufig Taylorenwicklungen nach Potenzen von u_1 weiter. Im stationären Fall wird man nach $Q_1(0)$ auflösen und erhält $\lambda_1 Q_1 = (\lambda_3-\lambda_1 u_1) Q_2 \qquad (\lambda_3 > \lambda_1)$

In die zweite Gleichung eingesetzt folgt

$$Q_1 = \left[\, 1-u_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\, \frac{\lambda_1(1-u_1)+\lambda_3}{\lambda_3-\lambda_1 u_1} \,\right] Q_1(0)$$

Aus der Normierung

$$1 = Q(1)=Q_1(1)+Q_2(1) \quad \text{folgt} \quad Q_1(1) = \frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3}$$

und daraus $Q_1(0) = \dfrac{\lambda_2 \cdot \lambda_3}{\lambda_2 \cdot \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3}$, womit das Problem gelöst ist.

Auf ähnliche Weise kann man auch andere kombinierte Probleme lösen und so wenigstens die stationäre Lösung er-

mitteln. Für ein System, das aus einem rein zufälligen "input" unendlicher Kapazität für die Warteschlange und einem aus n Stufen bestehenden Kanal besteht, führt der Ansatz

$$Q = Q_o + Q_1 u_2 + Q_2 u_2 + \ldots\ldots\ldots + Q_n u_2^n$$

weiter. Das liefert ein inhomogenes, lineares Gleichungssystem mit $Q_o(0)$ als Inhomogenität.

Dieses Verfahren dürfte auch für die Anwendung sehr wichtig sein, weil viele Probleme, die auf Warteschlangen führen, von diesem Typ sind.

Es wird also, der Fragestellung völlig angepaßt, eine Kombination aus der Methode der erzeugenden Funktionen (für die Zustände großer Kapazität) und der Matrix-Methode (für Zustände kleinere Kapazität) benutzt. Dieses Verfahren führt sicher dann zum Erfolg, wenn nur ein Zustand mit unendlich großer Kapazität vorliegt. Bei mehreren solchen Zuständen tritt wieder das Problem der Separation der Variablen auf. Unter Umständen muß das mühevolle Verfahren der sukzessiven Lösung von kleinen Besetzungszahlen an aufwärts in Kauf genommen werden.

T E I L C

A N W E S E N H E I T S - U N D
W A R T E Z E I T E N

I. Allgemeines

Die beiden wichtigsten Kenngrößen einer Warteschlange sind die Verteilung ihrer Länge und die Verteilung der Zeit, die ein Objekt von seiner Ankunft bis zum Beginn seiner Bearbeitung (die Wartezeit)bzw. bis zum Abschluß seiner Bearbeitung (die Anwesenheitszeit) benötigt. Der größte Teil der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich mit der Verteilung der Schlangenlänge, deren Kenntnis eine notwendige Voraussetzung für die Berechnung von Anwesenheits-und Wartezeiten ist. Durch geschickte Wahl der Zeitachse (Kap.II 2 und III 3) ist es sehr oft möglich, den Gesamtprozeß von der Ankunft eines Objekts α bis zur Fertigstellung eines in der Reihenfolge späteren Objekts β (Ankunft von α bis zur Ankunft von β Ankunftsprozeß) in Stufen mit exponentiell verteilter Zeit aufzugliedern. Für eine exponentiell verteilte Bearbeitungszeit eines Objekts ist es in jedem Zeitpunkt unerheblich, wie lange diese bereits andauerte. Solange eine Bearbeitungszeit eines Objekts in einer bestimmten Stufe noch andauert, kann man also so tun, als sei die Bearbeitung noch nicht begonnen. Das führt auf S.48 zu einer geeigneten Definition von Zuständen.Das Reziproke λ der mittleren Bearbeitungszeit spielt dann die Rolle einer Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den Zuständen, multipliziert außer mit den Wahrscheinlichkeiten für die Besetzungszahlen (in Bearbeitung befindliche + wartende Objekte) mit der Zahl der Bearbeitungsstellen für diese Stufe.

Besonders einfach lassen sich Anwesenheits-und Wartezeiten in den einzelnen Zuständen berechnen, wenn diesen jeweils nur eine Bearbeitungsstelle entspricht, alle anderen Objekte also warten müssen, und die Bearbeitung in der Reihenfolge der Bedienung erfolgt.

Noch an dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß ein prinzipieller Unterschied zwischen Systemen besteht, deren Zustände eine unendliche Kapazität besitzen und solchen mit endlicher Kapazität.

II. Unendliche Kapazität:

Für Systeme, deren Zustände eine unendliche Kapazität besitzen, braucht man nicht auf die Wahrscheinlichkeiten für die unendlich vielen Besetzungszahlen zurückzugreifen, sondern kann mit den erzeugenden Funktionen dieser Wahrscheinlichkeiten rechnen. Dafür können partielle Differenzen-Differential-Gleichungen angegeben werden, um deren Lösung sich die Kapitel IV und V bemühen. Es ist jedoch so, daß die erzeugenden Funktionen nicht als mathematische Fiktionen erscheinen, sondern durchaus eine reale Bedeutung besitzen, wenn man nach den Anwesenheits- und Wartezeiten fragt.
Für die Anwesenheitszeit A der im Zeitpunkt t_o in einem Zustand vorhandenen Einheiten gilt nach dem Fundamentalsatz über bedingte Wahrscheinlichkeiten.

$$P(A \leq t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A \leq t \mid N = n)\ P\ (N = n)$$

wo N die zufällige Variable der Besetzungszahlen ist.

$$A = B_1^* + B_2 + \ldots\ldots + B_N$$

B_1^* ist die restliche Bearbeitungszeit der Einheit 1, gerechnet von dem Eintritt der Einheit N = n in den betrachteten Zustand. Da die Bearbeitungszeit exponentiell verteilt ist, ist die Verteilung von B_1^* gleich der von B_1. Die B_i sind voneinander unabhängig mit der Exponentialverteilung F verteilt, also $A = F^{*N}$, der N-fachen Faltung von F mit sich selbst.
In diesem Fall ist es zweckmäßig, die Laplace-Transformation zu benutzen, da dann das Faltungsprodukt durch ein

gewöhnliches ersetzbar ist, also

$$\mathcal{L}\left\{P\ (\ A \leq t\ )\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mathcal{L}(F)\right]^{N} \cdot P\ (N = n)$$

Man gewinnt also die Verteilung aller Anwesenheitszeiten in den einzelnen Zuständen einer Kette durch folgendes Verfahren: Man nehme die erzeugende Funktion für die Kette und setze für die einzelnen Zustandsvariablen nacheinander die Laplace-Transformation der jeweils nachfolgenden Bearbeitungsstufe ein. Dann erhält man die Laplace-Transformation (L.T.) der einzelnen Anwesenheitszeiten. Wendet man dies auf alle Zustände gleichzeitig an, so ergeben sich die Anwesenheitszeiten für das Gesamtsystem. Man sieht auch sofort, daß die gesamte Anwesenheitszeit sich nur dann additiv aus den Anwesenheitszeiten in den einzelnen Zuständen zusammensetzt, wenn die einzelnen Zustände voneinander unabhängig sind, die Zustandsvariablen in Q also separierbar sind. Entsprechend ergibt sich die L.T. der Wartezeit des i-ten Zustandes aus $\left[Q(u_i) - Q(0)\right]/u_i$, indem man für u_i die L.T. der i-ten Bearbeitungsstufe einsetzt.

In Systemen mit Verlusten (Kap.VI,1) spielen sich ähnliche Vorgänge ab:

Wenn eine Einheit in einen bestimmten Zustand gelangt ist, errechnet sich ihre Anwesenheitszeit genau nach derselben Methode. Die Besetzungszahlen sind jetzt endlich. Die Reihenfolge lautet also:

Ermittlung der erzeugenden Funktion (und damit der Verlustwahrscheinlichkeit.) und aus dieser die Anwesenheitszeit der verbleibenden Einheiten.

Auf den ersten Blick scheint es so, als ob die Ergebnisse nur für den stationären Fall gelten, da nur dann über die P(N = n) in der Laplace-Verteilung die Zeit nicht explizit auftritt. Tatsächlich aber ist es so, daß die

P(N = n) lediglich die Ausgangssituation beschreiben und durch die Vorschrift, die Bearbeitung in der Reihenfolge des Eintritts vorzunehmen, die neu hinzukommenden Einheiten keinen Einfluß auf die Anwesenheitszeiten der vorhergehenden haben. Die in den P(N = n) auftretende Zeitabhängigkeit ist also ein Parameter, der sich lediglich auf den Ausgangszeitpunkt bezieht und bei der L.T. völlig ungeändert bleibt.

III. Kanalsystem:

Ist die Bearbeitungszeit nicht exponentiell verteilt, stimmen die Verteilungen von B und B^* nicht mehr überein.

Im Falle eines Ein-Kanalsystems ist aber (darunter wurde ein Stufensystem verstanden, das insgesamt nur eine Einheit aufnehmen kann) B durch die Angabe der Bearbeitungsstufe, in der sich die erste Einheit zur Zeit der Ankunft der n_1-ten befindet, vorgegeben, Die Formel über bedingte Wahrscheinlichkeiten lautet:

$$P(A \leq x) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{m} P(A \leq x \mid N_1 = n_1,\ N_2 = n_2)\ P(N_1 = n_1, N_2 = n_2)$$

Dabei sind N_1 bzw. N_2 die zufälligen Variablen, die der Besetzungszahl des dem Kanalsystem vorhergehenden Zustandes 1 bzw. den Zuständen des Kanalsystems entsprechen. Die L.T. der Bearbeitungszeiten der einzelnen Stufen seien $\phi_1(s), \phi_2(s), \ldots, \phi_m(s)$. Ferner sei $\phi(s) = \prod_{n_2=1}^{m} \phi_{n_2}(s)$.

Befindet sich die erste Einheit in der (n_2+1)-ten Bearbeitungsstufe, so ist die L.T. der restlichen Bearbeitungszeit dieser Einheit $\phi_{n_2+1}\phi_{n_2+2}\ldots\phi_m = \phi(s)/(\phi_1\ldots\phi_{n_2})$.

Die L.T. der gesamten Anwesenheitszeit des (n_1-1)-ten wartenden Objekts im Zustand 1 lautet dann

$$\phi^{n_1}/(\phi_1 \ldots\ldots \phi_{n_2})$$

Die Verteilung der Anwesenheitszeiten findet man also, indem man für die Variable des Zustandes 1 ϕ einsetzt, für die n_2-te Potenz der Kanalvariablen formal $1/\phi_1 \ldots \phi_{n_2}$ setzt. Im Falle einer Γ-verteilten Bearbeitungszeit kann man die Kanalvariable, die ja ursprünglich nur eine Hilfsgröße war, selbst benutzen, indem man sie gleich $1/\phi_1$ setzt. Die Konvergenzschwierigkeiten, die für kleine ϕ_1 auftreten, sind nur scheinbar. Es stimmt nämlich in allen Fällen, in denen die erste Bearbeitungsstufe abgeschlossen ist, die Zahl der wartenden Einheiten mit den sich im Zustand 1 befindlichen überein, sodaß im Zähler ein ϕ überzählig ist. Dieses bewirkt gerade, daß sich die L.T. auch der restlichen Bearbeitungszeiten einer Einheit zwischen 0 und 1 bewegt, also auch für die Potenzen der Kanalvariablen eingesetzt werden darf. Ganz analog wie oben ergeben sich die L.T. der Wartezeiten durch einfache Differenzbildung aus der erzeugenden Funktion. Sind alternativ zu einem Kanal auch andere betretbar, wobei die Präferenzenskala vorgegeben ist (allerdings in der Art, daß nach der Entscheidung für einen bestimmten Kanal die anderen gesperrt sind), so lassen sich auch hier ganz analog aus der gesamten erzeugenden Funktion die L.T. der Verteilung der Anwesenheitszeiten und der Wartezeiten angeben. Damit ist folgender allgemeine Fall behandelt:

1) Verteilung der Bearbeitungszeiten besitzt rationale L.T. mit den Beschränkungen, denen die Stufenmethode unterworfen ist.
2) Jeder Zeit kann die auftretende Warteschlange

unendlich lang sein, wobei bei Verlustsystemen alle neu hinzukommenden Einheiten verlorengehen, sobald eine bestimmte Schlangenlänge überschritten ist.

3) In dem jeder Warteschlange folgenden Bearbeitungssystem kann sich gleichzeitug nur eine Einheit befinden.

IV. Blockierung von Bearbeitungsstellen.

Erhebliche Komplikationen treten auf, wenn einzelne Zustände nur eine endliche Besetzungszahl zulassen,also im Falle von Systemen mit Doppelbegrenzung bzw.kombinierter Systeme.In diesem Falle können keine Übergänge in vollbesetzte Zustände stattfinden.Die einzelnen Einheiten werden dann also länger in den einzelnen Bearbeitungsstufen gehalten,als der Verteilung der Bearbeitungszeiten entspricht. Diese Blockierung kann zum Teil ganz erheblich sein.
Eins der einfachsten dieser blockierten Systeme ist das folgende kombinierte, in dem nacheinander ein Zustand 1 mit unendlicher Kapazität und ein Zustand 2 mit der Kapazität1durchlaufen werden. Es seien zunächst beide Zustände einfach besetzt. Die Stufe 1 habe die Bearbeitungszeit B_1, die Stufe 2 die Bearbeitungszeit B_2.Greift man einen beliebigen Zeitpunkt heraus, so seien die restlichen Bearbeitungszeiten der gerade versorgten Einheiten B_1^* und B_2^* . Ist $B_2^* \leq B_1^*$, dann ist der Zustand 2 bereits unbesetzt, wenn die Bearbeitung der ersten Stufe abgeschlossen ist.Es kann also sofort mit der zweiten Stufe begonnen werden. Ist jedoch $B_2^* > B_1^*$,so ist nach Abschluß der ersten Stufe die zweite noch besetzt.

Die erste Stufe wird dann die Zeit $B_2^*-B_1^*$ blockiert, bis die zweite wieder frei ist.Durch diese Art von Blockierung ist also die Anwesenheitszeit der Einheit 1 im Zustand 2 B_2^*, die der Einheit 2 im Zustand 1 Max (B_1^*,B_2^*).Dessen Verteilungsfunktion F ist durch

$$F(t)=P\left[\text{Max}(B_1^*,B_2^*)\leq t\right]=P(B_1^*\leq t,B_2^*\leq t)=P(B_1^*\leq t)P(B_2^*\leq t)=F_1(t)\cdot F_2(t)$$

gegeben, da B_1^* bzw. B_2^* wegen der Exponentialverteilung wie B_1,B_2 verteilt sind. Die Verteilungsfunktion der Anwesenheitszeit der n-ten Einheit im Zustand 1 ist dann durch $[F_1(t)F_2(t)]^{*n}$ mit der L.T.$[\mathfrak{L}(F_1(t)\cdot F_2(t))]^n$ gegeben.

Als das wesentliche Element dieser Rechnung ist zu beachten, daß in dieser Form die in der Matrixformulierung vorkommenden Übergänge von den jeweiligen Bearbeitungszeiten abhängen.Doch lassen sich zwei Fälle angeben,die auch hier leicht zu behandeln sind.

Der erste Fall ist der, daß die Einheiten in der zweiten Stufe so lange gehalten werden,bis aus der ersten Stufe eine neue Einheit in die zweite eintritt.Übergänge geschehen also in beiden Zuständen gleichzeitig im zeitlichen Abstand $\text{Max}(B_1,B_2)$. Die jeweils größere der Bearbeitungszeiten bestimmt dann die Übergänge.Hierbei ändert sich die Besetzung des Zustandes 2 so lange nicht, wie der Zustand 1 noch Einheiten enthält. Es ist dies der Fall eines Lagers unendlicher Kapazität, aus dem die Einheiten für ein aus zwei Stufen bestehendes Fließband genommen werden. $\text{Max}(B_1,B_2)$stellt dabei die Taktzeit dar.

Der zweite Sonderfall ist folgender:

Kann die Bearbeitung einer Einheit in einer Stufe nicht abgeschlossen werden,so wird sie so lange unterbrochen, bis sie beendet werden kann.In dem angeführten Beispiel ist das der Fall eines Kanalsystems aus zwei Stufen,des-

sen Einheiten aus einem Lager unendlicher Kapazitäten stammen.Es wird also hier im gesamten System **gleichzei** - tig jeweils nur eine Einheit bearbeitet. Ist also im Zeitpunkt t_o die Bearbeitungszeit der Einheit 1 in der Stufe 2 B_2,so ist die restliche Anwesenheitszeit der Einheit 2 im Zustand 1 durch B_1+B_2 gegeben. Es muß also erst eine Wartezeit B_2 vergehen, bis die Einheit 2 in die Stufe 1 mit der Bearbeitungszeit B_1 eintreten kann.
Es bedarf wohl keiner Erwähnung, daß im Fall des Fließbandes die unproduktiven Zeiten kleiner sind, da offenbar $\text{Max}(B_1,B_2) \leq B_1+B_2$(=nur im Falle,daß eine der beiden Grössen Null ist).
Es lohnt sich,auf beide Sonderfälle ausführlich einzugehen, da sie besonders wichtig für die Anwendung sind.

1. Das stochastische Fließband:

Gegeben seien n Bearbeitungstellen, die von jeder Einheit in der gleichen Reihenfolge zu durchlaufen sind. Es möge jede Bearbeitungsstelle mit einer Einheit besetzt sein. Der Übergang zur nächsten Bearbeitungsstufe erfolge gleichzeitig, und zwar erst dann, wenn jede Bearbeitungsstelle die Operationen an "ihrer Einheit" beendet hat. Die Zeit zwischen zwei Übergängen,die sog. "Taktzeit", richtet sich nach der jeweils längsten Bearbeitungszeit, ist also durch den Ausdruck

$$B = \text{Max}\ (B_1,B_2,\ldots\ldots B_n)$$

gegeben. Das ist allgemein die durch Blockierung erhaltene Aufenthaltszeit in der ersten Bearbeitungsstufe, wenn alle Zustände voll besetzt sind. Die Aufenthaltszeit in der i-ten Stufe wäre durch

$$\text{Max}\ (\ B_i,\ B_{i+1}\ldots\ldots B_n)$$

gegeben.

B kann also wie im oben angeführten Beispiel dadurch erreicht werden, daß die Aufenthaltszeiten in der 2. bis n-ten Stufe auf B aufgestockt werden.
Fragt man nach der Verteilungsfunktion F der Zufallsgrösse B, so ergibt sich diese aus den F_i der Größen B_i

$$F(t)=P(B\leq t)=P\left[\mathrm{Max}(B_1,B_2,\ldots B_n)\leq t\right]=P(B_1\leq t)P(B_2\leq t)..P(B_n\leq t)$$

$$=F_1(t)\cdot F_2(t).....F_n(t)$$

In der Erlangschen Stufen-Methode werden Bearbeitungszeiten mit rationaler L.T.untersucht, deren Dichtefunktion also eine Summe von Gamma-Verteilung ist. Da

$$\lambda\int_0^t \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}dt=-\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}+1$$

ist durch einfache Summation und Produktbildung auch die Verteilung von B eine Summe von Gamma-Verteilungen mit rationaler L.T., ist also durch die Stufenmethode erfaßbar.
Explizit sei hier der Fall vorgerechnet, wo alle $F_i(t)$ derselben Exponential-Verteilung gehorchen: $F_i(t)=1-\exp(-\lambda t)$
Die Verallgemeinerung auf andere Verteilungen ist dann evident.

$$F(t)=(1-e^{-\lambda t})^n,\quad f(t)=n(1-e^{-\lambda t})^{n-1}\lambda e^{-\lambda t}$$

$$\mathfrak{L}(F(t))=\lambda n\int_0^\infty e^{-st}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}e^{-\lambda t}dt=\lambda n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{s+\lambda+k\lambda}=\frac{\lambda}{s+\lambda}\cdot\frac{2\lambda}{s+2\lambda}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{n\lambda}{s+n\lambda}$$

Setzt man $k\lambda=\lambda_k$, so sieht man deutlich, daß sich die Taktzeit gerade in n hintereinander ausgeführte, exponentiell verteilte Stufen mit den Parametern $\lambda_k = k\lambda$ auflösen läßt. Diese Stufen sind völlig verschieden von den wirklich durch die Bearbeitungsstellen vorgegebenen und

stellen,wie oft bei der Stufenmethode,eine nützliche Rechengröße dar.
Nach Ablauf einer Taktzeit tritt eine Einheit in das Fließband ein,eine weitere gleichzeitig aus,so lange die Zahl der Einheiten $\geq$ der Zahl n der Bearbeitungsstellen im Fließband ist.
Die Betrachtung über die Wahrscheinlichkeiten von Besetzungszahlen geht von der Ununterscheidbarkeit der Einheiten aus,d.h.es ist für diese völlig unerheblich,ob es sich beim Eintritt in das Fließband und beim Austritt aus ihm heraus um verschiedene oder gleiche Einheiten handelt. Ist einmal die Verteilung der Taktzeit B vorgegeben,so hat das Fließband selbst auf die Besetzungszahlen der vorhergehenden und folgenden Zustände keinen Einfluß mehr. Man kann also bei diesen Überlegungen so vorgehen,als hätte man ein Einkanalproblem vor sich.
Das Fließband hat jedoch einen erheblichen Einfluß auf die Anwesenheits-und Wartezeiten,was ihm seine Behand - lung in diesem Kapitel verdankt.
Es wird also nach den Anwesenheitszeiten in dem, dem Fließband vorausgehenden Lager gesucht.Ist im Lager im Zeitpunkt t_o eine Einheit vorhanden und befindet sich das Fließband im k-ten Zustand des ihm zugeordneten Kanals, so ist die L.T. der restlichen Anwesenheitszeit der betrachteten Einheit durch $\prod_{j=k+1}^{n} \frac{j\lambda}{s+j\lambda}$ gegeben. Das ist auch gleich der restlichen Bearbeitungszeit der sich in der n-ten Bearbeitungsstufe des Fließbandes befindlichen Einheit.Liegt bei t_o noch eine zweite Einheit vor, so ergibt sich dessen restliche Anwesenheitszeit im Lager durch $\prod_{j=1}^{n} \frac{j\lambda}{s+j\lambda} \cdot \prod_{j=k+1}^{n} \frac{j\lambda}{s+j\lambda}$.
Das ist gleich der restlichen Bearbeitungszeit der im Zeitpunkt t_o in der (n-1)-ten Stufe des Fließbandes befindlichen Einheit. Entsprechend ergibt sich für die L.T.

der restlichen Anwesenheitszeit der r-ten Einheit im Lager bzw. der restlichen Bearbeitungszeit der Einheit in der (n+1-r)-ten Stufe des Fließbandes $\left\{\prod_{j=1}^{n} \frac{j\lambda}{s+j\lambda}\right\}^{r-1} \prod_{j=k+1}^{n} \frac{j\lambda}{s+j\lambda}$

Zur Ermittlung der Verteilung der Anwesenheitszeiten wird man also wie folgt vorgehen:

1) Man sucht die erzeugende Funktion eines aus einem Lager unendlicher Kapazität und anschließendem einzelnen Kanals bestehenden Systems auf.
2) Für die Kanalvariable v_k setze man $\prod_{j=k+1}^{n} \frac{j\lambda}{s+j\lambda}$ für die Lager-Variable u $\prod_{j=1}^{n} \frac{j\lambda}{s+j\lambda}$

Dann hat Q die Rolle der L.T. der Anwesenheitszeit des Lagerbestandes.Die L.T.der gesamten Bearbeitungszeit einer Einheit ist durch den Ausdruck $\left\{\prod_{j=1}^{n} \frac{j\lambda}{s+j\lambda}\right\}^{n}$ gegeben.

Ist die Zahl der Einheiten kleiner als die Zahl der Bearbeitungsstellen des Fließbandes, so ist das angegebene Modell nicht mehr anwendbar, da für die Berechnung von B weniger als n Zufallsgrößen eingehen. In diesem Fall ist das Fließbandmodell auch völlig unrationell,da hier andere Modelle zu erheblich kürzeren Bearbeitungszeiten führen.

2. Die Matrixmethode:

In dem Modell,wie es für die Behandlung in Matrizen gebraucht wird,hängen die Übergänge zwischen Zuständen nicht von den explizit vorliegenden,exponentiell verteilt angenommenen Bearbeitungszeiten einer Einheit ab. Wäre das der Fall,müßten auch Übergänge möglich sein, die in einem Zeitpunkt mehr als eine Einheit betreffen. Um diese auszuschließen, muß eine besondere Form der Blockierung gefordert werden:Wenn die Bearbeitung einer

Einheit in einer Stufe nicht abgeschlossen werden kann, wird sie so lange unterbrochen, bis sie beendet werden kann.Anders ausgedrückt:Ist etwa λ der Parameter der Exponentialverteilung, so fällt in jedem Zeitelement dt die Entscheidung mit der Wahrscheinlichkeit λdt für Beendigung der Bearbeitungsstufe und Übergang zur nächsten, und mit der Wahrscheinlichkeit $1-\lambda dt$ für Fortsetzung der Bearbeitung in der selben Stufe. Ist während der Zeit dt die Alternative nicht möglich, im vorliegenden Fall die Alternative 1,so findet keine Entscheidung statt.Die Bearbeitung wird also unterbrochen.Es sollen etwa in einem Zweiersystem die Anwesenheitszeiten (dabei sind natürlich die restlichen Anwesenheitszeiten gemeint, gerechnet von einem Bezugszeitpunkt t_o)der Einheiten in den einzelnen Zuständen 1 und 2 berechnet werden.Der Zustand 2 erfährt keine Beschränkung.Es sei seine Kapazität N_2.Für eine Besetzungszahl $n \leq N_2$ ist dann die L.T. der Anwesenheitszeit $[\mathfrak{L}(F_2)]^n$, also die L.T. der Anwesenheitszeit im gesamten Zustand 2

$$\sum_{m=0}^{N_1} \sum_{n=1}^{N_2} P(m,n)[\mathfrak{L}(F_2)]^n,$$

wie im Fall ohne Beschränkung der Kapazität.
Im Zustand 1 treten dagegen Beschränkungen auf.Sei etwa der Zustand 2 n-fach besetzt ($n \leq N_2-1$),so ist die Anwesenheitszeit der ersten Einheit im Zustand 1 durch die Verteilungsfunktion $F_1 = 1-e^{-\lambda_1 t}$ mit $\mathfrak{L}(F_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+s}$ gegeben.
Ist der Zustand 2 jedoch N_2-fach besetzt, so ist die L.T. der Anwesenheitszeit durch $\mathfrak{L}(F_1)\cdot\mathfrak{L}(F_2)$ gegeben,da erst die Bearbeitung einer Einheit im Zustand 2 abgeschlossen werden muß,bevor die der ersten Einheit im Zustand 1 in Angriff genommen werden kann. Das bedeutet also, daß die L.T. der Anwesenheitszeit der ersten Ein-

heit im Zustand 1 durch den Ausdruck

$$\mathcal{L}(F_1)\cdot\Big[\sum_{n=0}^{N_2-1} P(1,n) + P(1,N_2)\,\mathcal{L}(F_2)\Big]$$

gegeben ist. Die Beschränkung der Kapazität des Zustandes 2 hat hier also lediglich zur Folge, daß zur Berechnung der L.T. der Anwesenheitszeit der Einheit 1 im Zustand 1 statt $P(1,N_2)P(1,N_2)\cdot\mathcal{L}(F_2)$ verwendet werden muß.

Für die Berechnung der Anwesenheitszeit der 2. Einheit im Zustand 1 sehe man sich den Markoff-Graphen dieses Systems an (analog Darstellung 1). Ist der Zustand 2 n-fach ($n\leq N_2-2$) besetzt, so werden die Übergänge nicht behindert. Die L.T. der Anwesenheitszeit lautet $[\mathcal{L}(F_1)]^2$, die der Wartezeit $\mathcal{L}(F_1)$. Für $n=N_2-1$ müssen drei Übergänge hintereinander geschaltet werden, 2 aus dem Zustand 1, einer aus dem Zustand 2; für $n=N_2$ werden es gar vier, nämlich je 2 aus den Zuständen 1 und 2.
Der Ausdruck für die L.T. der Anwesenheitszeit der Einheit 2 im Zustand 1 lautet dann

$$[\mathcal{L}(F_1)]^2\Big\{\sum_{n=0}^{N_2-2} P(2,n)+P(2,N_2-1)\cdot\mathcal{L}(F_2)+P(2,N_2)\,[\mathcal{L}(F_2)]^2\Big\}$$

Maßgebend für diese Größen ist auf dem Markoff-Graphen die niedrigst mögliche Zahl von Übergängen.
Für die Berechnung der Anwesenheitszeit der dritten Einheit im Zustand 1 erhält man

$$[\mathcal{L}(F_1)]^3\Big\{\sum_{n=0}^{N_2-3} P(3,n)+P(3,N_2-2)\cdot\mathcal{L}(F_2)+P(3,N_2-1)\cdot[\mathcal{L}(F_2)]^2 + P(3,N_2)\,[\mathcal{L}(F_2)]^3$$

allgemein für die Anwesenheitszeit des m-ten Objekts(dabei sind unter Umständen gewisse Wahrscheinlichkeiten gleich 0)

$$[\mathfrak{L}(F_1)]^m \left\{ \sum_{n=0}^{N_2-m} P(m,n) + \sum_{n=1}^{m} P(m,N_2-m+n)[\mathfrak{L}(F_2)]^n \right\}$$

Für die L.T.der gesamten Anwesenheitszeit einer Einheit im Zustand 1 ergibt sich demnach allgemein

$$\sum_{m=1}^{N_1} [\mathfrak{L}(F_1)]^m \left\{ \sum_{n=0}^{N_2-m} P(m,n) + \sum_{n=1}^{m} P(m,N_2-m+n)[\mathfrak{L}(F_2)]^n \right\}$$

Die Wartezeitenverteilung findet man, wenn man $[\mathfrak{L}(F_1)]^m$ durch $[\mathfrak{L}(F_1)]^{m-1}$ ersetzt.

Damit ist der Fall eines aus 2 Zuständen mit begrenzter Kapazität bestehenden Systems, wo die Blockierung auf bestimmte, oben definierte Weise erfolgt, in zwei Schritten gelöst worden:

1) Ermittlung der P(m,n) aufgrund einer Matrixmethode
2) aus dieser Berechnung der Anwesenheits-und Wartezeiten für die beiden Zuständen zugeordneten Stufen.

Nachdem so der einfachste Fall zweier Zustände gelöst worden ist, können auch die allgemeineren Fälle behandelt werden.

Als ersten Schritt zeichne man den Markoff-Graphen[1] für das betreffende System auf. Man benötigt dazu ein Koordinatensystem, dessen Dimension mit der Zahl der Zustände übereinstimmt.Die Besetzungskombinationen sind dabei als Netzpunkte einzutragen, wobei man sich jeweils auf positive Koordinaten beschränken kann (das entspricht einem System mit Einfach-Begrenzung, dem die Methode der erzeugenden Funktionen angemessen ist). In einem System mit Doppelbegrenzung wird aus dem Gesamtraum ein endliches Volumen herausgegriffen.Die Übergänge zwischen den einzelnen Punkten werden durch Pfeile angedeutet.

Liegt ein System mit Einfachbegrenzung vor, so sind alle Übergänge von einem bestimmten Zustand i aus von den Besetzungszahlen der übrigen unabhängig.Für die jetzt folgenden Überlegungen ist dann jeder Punkt aus der durch Vorgabe der Besetzungszahl n_i im Zustand i vorgegebenen Hyperebene gleichwertig.Man wird dann in Richtung des aus dem Zustand i herausführenden Pfeils $\overrightarrow{\lambda_{i+1}}$ fortschreiten, ausgehend von einem beliebigen Punkt der genannten Hyperebene und endend bei der durch die Besetzungszahl 0 gegebenen Hyperebene.Die L.T.der Anwesenheitszeit der n_i-ten Einheit im Zustand i ermittelt man dann durch Produktbildung aus $P(n_i)$ und $\mathfrak{L}(F_i)= \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1}+s}$, wo n_i auch gleich der Zahl der benötigten Pfeile ist.

In einem System mit Doppelbegrenzung sind nicht mehr alle Punkte der genannten Hyperebene gleichwertig. Es wird nämlich Punkte geben, wo das Fortschreiten in Richtung $\overrightarrow{\lambda_{i+1}}$ auf eine Begrenzung führt. Das entspricht dem Fall, wo der Zustand i+1 voll besetzt ist. In diesem Falle ist ein Umweg in Richtung $\overrightarrow{\lambda_{i+2}}$ nötig. In der L.T. ist dafür ein Faktor $\mathfrak{L}(F_{i+1})$ mitzunehmen. Von dem dann erreichten Punkt versucht man weiter in Richtung $\overrightarrow{\lambda_{i+1}}$ fortzuschreiten, bis wieder eine Begrenzung erreicht ist, usw. Trifft man auf diesem Wege auf Punkte, wo sowohl ein Fortschreiten in Richtung $\overrightarrow{\lambda_{i+1}}$ als auch in $\overrightarrow{\lambda_{i+2}}$ nicht möglich ist, wohl aber in Richtung $\overrightarrow{\lambda_{i+3}}$, wenn also die Zustände i und i+1 voll besetzt sind, so wird man zunächst in Richtung $\overrightarrow{\lambda_{i+3}}$, dann in Richtung $\overrightarrow{\lambda_{i+2}}$ und schließlich wieder in Richtung $\overrightarrow{\lambda_{i+1}}$ fortschreiten.Ein analoges Vorgehen ergibt sich, wenn Übergänge aus noch höheren Zuständen nötig sind.Für jeden nötigen Übergang $\overrightarrow{\lambda_{j+1}}$ $(j \geq i)$ tritt ein Faktor $\mathfrak{L}(F_j)$ in die Rechnung ein.Den so gefundenen Weg nennt man eine

"Trajektorie"[1] .Summiert man über alle Trajektorien,die im Raume möglich sind, wobei die Wahrscheinlichkeiten der Ausgangspunkte als Gewichte auftreten, so erhält man die L.T.der Anwesenheitszeit im i-ten Zustand.
Sind die Begrenzungen der Kapazitäten nicht voneinander unabhängig, d.h. ist das herausgegriffene Realisierbarkeitsvolumakein Parallelepiped, so ist in der Trajektorie unter Umständen nach einem höheren Übergang auch ein tieferer direkt möglich, ohne daß vorher die in der Numerierung dazwischen liegenden realisiert werden müßten.
Hat etwa die Summe der Besetzungszahlen aller m Zustände eine obere Grenze N, so ist das herausgegriffene Volumen von folgendden Hyperebenen begrenzt: $n_1=0$, $n_2=0$,...$n_m=0$ und die durch die Punkte (N,0.....0),(0,N,0....0)..... (0,.....0,N) gehende.Es sind sogar Fälle denkbar, wo einzelne Punkte ausgeschlossen sind oder wo die Begrenzungen krummflächig sind. Besonders interessant für die Programmierung sind solche Fälle, wo die Begrenzungen von bestimmten frei wählbaren Parametern abhängig sind.Auch diese sind durchaus mit der Matrix-Methode erfaßbar.
Erheblich komplizierter werden die Fälle, wo die Begrenzungsflächen von der Zeit abhängen. In diesem Fall hängt nämlich auch die Form der Trajektorien von der Zeit ab (natürlich nur insofern, als sie Punkte enthält, die nicht in jedem Zeitpunkt zum Realisierungsvolumen gehören), während sie bisher ja von Anfang an vorgegeben sind.Wie ist eine solche zeitliche Änderung der Kapazität denkbar? Nimmt sie etwa ab, so darf solange keine Einheit eintreten, bis die neue Kapazitätsgrenze erreicht ist. Nimmt sie zu, so dürfen Einheiten eintreten, obwohl keine abgefertigt wurden.Während also eine Zunahme kurzfristig sein kann, ist jedenfalls eine Abnahme recht langfristig.

Ein Übergang in den i-ten Zustand ist nur dann möglich,

wenn die Besetzungszahl $n_i \leq N_i(t)-1$. In diesem Fall ist die Übergangswahrscheinlichkeit λ_i. Ist dagegen $n_i \geq N_i(t)-1$, so ist ein Übergang gesperrt. Die Übergangswahrscheinlichkeit lautet also statt λ_i $\lambda_i \cdot \varepsilon(N_i(t)-n_i-1)$, wo $(N_i(t)-n_i-1)$ die Heaviside-Funktion oder uneigentliche Verteilung der Variablen $N_i(t)-n_i-1$ ist.

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Mit dieser abgeänderten Übergangswahrscheinlichkeit lassen sich die anfallenden Probleme lösen.

V. Mehrere Bearbeitungsstellen für die gleiche Warteschlange.

In den bisherigen Betrachtungen konnte in einer Bearbeitungsstufe gleichzeitig nur eine Einheit bearbeitet werden, die anderen im gleichen Zustand mußten warten. In diesem Abschnitt sollen nun auch mehrere Einheiten gleichzeitig, aber unabhängig voneinander, bearbeitet werden. Seien alle Bearbeitungsstellen besetzt, so wird in einem Zeitpunkt t_o die restliche Wartezeit der ersten Einheit in der Warteschlange durch die restlichen Bearbeitungszeiten B_i der in Arbeit befindlichen Einheiten bestimmt und zwar durch die kleinste davon. Gesucht wird also die Verteilungsfunktion $F(t)$ der Zufallsgröße

$$P\left[\mathrm{Min}(B_1^*, B_2^*, \ldots . B_n^*) \leq t\right] = 1-(1-P(B_1^* \leq t)) \ldots . (1-P(B_n^* \leq t))$$

Besonders einfach wird der Fall, wenn die Bearbeitungszeiten exponentiell verteilt sind, also $P(B_i^* \leq t) = P(B_i \leq t) = 1- \exp(-\lambda_i t)$. Dann ist nämlich $F(t)=1-\exp(\sum \lambda_i t)$ mit der L.T. $\mathfrak{L}(F)=\sum \lambda_i/(s+\sum \lambda_i)$. Die Wartezeit der k-ten Einheit in der Schlange ist dann durch die L.T. ihrer Verteilung gegeben:

$$[\mathcal{L}(F)]^k = \left\{\frac{\sum \lambda_i}{s+\sum \lambda_i}\right\}^k$$

Im Falle exponentiell verteilter Bearbeitungszeiten ist auch die Frage der Anwesenheitszeiten einfach zu beantworten. In jedem Zeitelement dt ist die Wahrscheinlichkeit für die Beendigung der Wartezeit der ersten Einheit in der Schlange $(\sum \lambda_i)dt$ und zwar mit der Wahrscheinlichkeit λ_j dt durch Eintritt in die j-te Bearbeitungsstelle. Die Bearbeitungszeit der betrachteten Einheit hat dann die Verteilungsfunktion

$$1 - \frac{\sum \lambda_i e^{-\lambda_i t}}{\sum \lambda_i}$$

Durch Multiplikation seiner L.T. $\dfrac{\sum_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i+s}^2}{\sum \lambda_i}$

mit der der Wartezeiten ergibt sich dann die der Anwesenheitszeiten. Damit ist der Fall, wo die Zahl der Einheiten die der Bearbeitungsstellen übertrifft, behandelt worden. Die Verteilung der Zahl der Wartenden ist mit der Methode der erzeugenden Funktionen anzugeben.

Problematisch ist jedoch der Fall, wo die Zahl der Bearbeitungsstellen größer als die Zahl der Einheiten in dem betreffenden Zustand ist, wenn also keine Einheit warten muß.

In diesem Fall ergibt sich die Zuordnung zu einer bestimmten Bearbeitungsstelle nicht zwangsläufig aus der Beendigung der Bearbeitung einer in der Reihenfolge vorhergehenden Einheit.Die Einheit hat immer noch die Möglichkeit, sich für mehrere Bearbeitungsstellen zu entscheiden.Es müssen dann die Präferenzen $\pi_1, \pi_2, \ldots\ldots \pi_n$ für die einzelnen Stellen berücksichtigt werden. Diese können unabhängig davon sein, ob eine Stelle besetzt ist oder nicht. Das bedeutet, daß die eine vorliegende Warteschlange nach

den Präferenzen in n aufgespalten wird, die jede einer einzigen Bearbeitungsstelle zuzuordnen sind.

Eine weitere Möglichkeit liegt daran, daß bedingte Präferenzen auftreten, etwa in der Art, daß die Verhältnisse der Präferenzen für die unbesetzten Stellen sich nicht ändern, die Einheiten jedoch bei Besetztsein einer Stelle ihre Präferenz für diese auf die anderen verteilen. Ist etwa die Stelle 1 besetzt, so sind die Präferenzen für die anderen $\frac{\pi_2}{\pi_2+\ldots\ldots\pi_n}, \ldots\ldots\ldots, \frac{\pi_n}{\pi_2+\ldots\ldots\pi_n}$.

Sind 1 und 2 besetzt, so sind die Präferenzen für die anderen $\frac{\pi_3}{\pi_3+\ldots+\pi_n}, \ldots\ldots\ldots, \frac{\pi_n}{\pi_2+\ldots+\pi_n}$.

Bei Vorgabe dieser Präferenzen liegen die Schwierigkeiten nur im Rechenaufwand. Man hat nämlich $\binom{n}{1}$ Wahrscheinlichkeiten, daß eine Einheit bearbeitet wird, $\binom{n}{2}$ daß 2,.... allg. $\binom{n}{k}$, daß k Einheiten bearbeitet werden, also insgesamt 2^n.

Das Konzept der Präferenzen verliert seinen Sinn, wenn alle Bearbeitungsstellen dieselben Verteilumgsfunktionen haben. Sukzessiv wird man dann die Wahrscheinlichkeiten für die Besetzungszahlen von 0 bis n berechnen und dann die für n als Ausgangspunkt für eine Rechnung mit der Methode der erzeugenden Funktion benutzen. Die L.T.der Anwesenheitszeiten in diesem Zustand sind dann durch

$$\frac{\lambda}{\lambda+s}\left\{\sum_{k=1}^{n} P(k) + \sum_{k=1}^{\infty} P(n+k)\ \frac{\lambda}{n\lambda+s}\right\}$$

gegeben. Als wesentliches Ergebnis bei Zuständen mit unendlicher Kapazität zeigt sich, daß sie im stationären Fall voneinander unabhängig sind, solange an die Abhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeiten λ_i von den Besetzungszahlen bestimmte Anforderungen gestellt werden.

Der Fall, daß die zu einem Zustand gehörigen Bearbeitungsstellen >1 ist, aber nicht so groß, daß der Grenzübergang $\longrightarrow \infty$ erlaubt wäre, ist hierin leider nicht enthalten.In diesem Fall wird man die Matrix-Methode anwenden, wobei man für jedes Lager eine erzeugende Funktion in Rechnung stellt.

Hat man etwa 2 Zustände mit m bzw. n Bedienungsstellen, so bekommt man Beziehungen zwischen Größen P(i,k) ($i \leq m, k \leq n$), die nur Besetzungszahlen enthalten, Q(i,v) und Q(u,k), die die Variable eines Lagers und die Besetzungszahl des anderen Zustandes enthält und Q(u,v), die die Variablen beider Lager enthält.
Bei der Berechnung der L.T. der Wartezeit der Einheiten in den Warteschlangen ist für u $\frac{\lambda_2^m}{\lambda_2^{m+s}}$, für v $\frac{\lambda_3^n}{\lambda_3^{n+s}}$ einzusetzen. Für die Berechnung der Anwesenheitszeiten treten noch Faktoren $\frac{\lambda_2}{\lambda_2+s}$ bzw. $\frac{\lambda_3}{\lambda_3+s}$ auf, auch in den Ausdrücken, die Besetzungszahlen > 0, aber keine Wartezeiten enthalten.

1. Kanäle:

Sind die Bearbeitungszeiten in jeder Stelle durch exponentiell verteilte Stufen darstellbar, so ist die Verteilungsfunktion $P[\text{Min}(B_1, B_2, \ldots . B_n)]$ von den Stufen abhängig, in denen sich die einzelnen Einheiten befinden. Sei die Zahl der Stufen =m, so gibt es immerhin m^n Kombinationen.Hat man diese aufgrund der Matrix-Methode gewonnen, so lassen sich wieder sofort die Anwesenheits- und Wartezeit-Verteilungen angeben. Man sieht also,wie kompliziert die Rechnungen werden, wenn in den Zuständen mehr als eine Bearbeitungsstufe vorliegt.

VI . DIE HAUPTFÄLLE DER WARTESCHLANGENTHEORIE.

1. Maschinenwartung.

Gegeben sei ein Maschinenpark mit N Maschinen.Nach einer gewissen Laufzeit fallen die Maschinen aus und werden repariert bzw.mit neuen Werkstoffen beladen, oder an ihnen werden Einzelteile ausgewechselt.Gegeben seien die Laufzeiten L und Reparaturzeiten B.Sind diese konstant, so lassen sich je nach Zahl der Reparaturstellen und Größe von L,B und N recht interessante Ergebnisse angeben.Ist die Zahl der Reparaturstellen N, so wechseln sich B und L für jede Maschine unabhängig von einander ab.Ist die Zahl der Reparaturstellen = 1, so ergibt sich für (N-1)B=L nach gewisser Zeit (die von den Zeitpunkten der Inbetriebnahme der Maschinen abhängt)ein stationärer Prozeß mit fester Reihenfolge,wo weder Leerzeiten für die Reparaturstellen noch Wartezeiten für die Maschinen auftreten.Ist B größer, so tritt die Differenz(N-1)B-L als stationäre Wartezeit auf.Ist B kleiner,so treten Leerzeiten für die Reparaturzeiten in Höhe von L-(N-1)B während der Zeit L auf. Wie diese verteilt sind,hängt von der Vorgeschichte ab.Im Falle mehrerer Reparaturzeiten und Laufzeiten gibt es stets Wartezeiten,die jedoch unter gewissen Bedingungen stationär sein können. Diese Probleme sind hier nur kurz angedeutet, obwohl sie recht interessant sind.

Ganz andersartige Probleme treten auf,wenn mindestens eine der Größen L und B stochastisch mit gegebener Verteilung ist. In der hier vorliegender Arbeit sind beide Größen als stochastisch angenommen.

Besonders einfach wird das Problem, wenn für jede Maschine eine Reparaturstelle bereit steht.In diesem Falle treten keine Wartezeiten auf.Die Faltung aus den Verteilungs-

funktionen von Lauf-und Reparaturzeit liefert dann die Länge eines Zyklus, also etwa von Ausfall zu Ausfall einer Machine . Der Fall exponentiell verteilter Stufen ist als Anwendung der Matrix-Methode als Kanalproblem durchgerechnet.

Ist die Zahl der Reparaturstellen kleiner als die Zahl der Maschinen, so sind Wartezeiten möglich.Diese sind ein Ausdruck für die Korrelation der einzelnen Zyklen. Der extremste Fall einer einzigen Reparaturstelle sei hier kurz behandelt.

Im Zeitpunkt t_o sei gerade die k-te Maschine ausgefallen, die erste sei in Reparatur und die zweite bis(k-1)te warte darauf.Dann ist die Zeit bis zum Ausfall einer weiteren Maschine durch die restlichen Laufzeiten L^*_{k+1} $.....L^*_N$, durch die restliche Reparaturzeit B^*_1 der Maschine 1 und die Reparaturzeiten $B_2,.....B_k$ der Maschinen 2-k und die Laufzeiten $L_1,L_2,.....L_k$ der Maschinen 1 bis k bestimmt und zwar durch den Ausdruck

$$\text{Min}[L^*_{k+1},....L^*_N,B^*_1 + L_1, B^*_1+B_2+L_2,....B^*_1+B_2..+B_k+L_k]$$

Dieser Ausdruck ist deshalb so kompliziert,weil die gesamte Vorgeschichte des Systems außer in der Angabe der Zahl k in den gesternten Größen liegt.Das sieht man sofort, wenn man nach der Zeit fragt,die nötig ist,bis noch eine Maschine ausgefallen ist.Die dann auftretenden Größen $L^{**}_{k+1},....L^{**}_N$ und auch ihre Verteilungen werden nämlich von den einfach gesternten Größen im allgemeinen verschieden sein.Selbst dann, wenn beide Verteilungen gleich sind(Exponentialverteilung!)weiß man nicht einmal, wieviele Reparaturen abgeschlossen wurden, ja, ob überhaupt eine abgeschlossen ist. Man wird daher nach Methoden suchen, um zu Informationen über diese Fragen zu kommen.

Das wird dann möglich,wenn die Verteilung der Lauf-und Reparaturzeit beide eine rationale L.T. haben bzw.sich durch geeignete Transformation der Zeitachse in eine solche überführen lassen.Dann lassen sich nämlich beide Größen in unabhängige Stufen (auch parallel)mit Exponentialverteilung auflösen,wie bei der Besprechung der Erlangschen Stufenmethode gezeigt wurde.Das hatte zur Folge, daß man Zustände bestimmter Art definieren konnte: Eine Maschine befindet sich in einem bestimmten Zustand, wenn sie sich in der zugehörigen Laufzeit-oder Reparaturzeit-Stufe befindet bzw.auf Zulassung zu dieser wartet. Unter der Voraussetzung der Unabhängigkeit der Reparatur-und Laufzeiten der einzelnen Maschinen voneinander kann in jedem Zeitelement dt jeweils nur eine Maschine seine Stufe ändern.
Im allgemeinen werden derselben Reparaturstelle Maschinen mit gleicher Laufzeitverteilung zugeordnet.Die der Laufzeit zugeordnete Zustände haben keine Beschränkung in den Besetzungszahlen,die der Reparaturzeit entsprechenden haben eine und zwar in der Zahl der Reparaturstellen.Durch die Gesamtzahl der Maschinen sind jedoch die Besetzungszahlen insgesamt nach oben beschränkt.Je größer die Zahl der Maschinen ist,desto weniger ist die Gesamtbeschränkung spürbar.

Zwei Sonderfälle sind besonders wichtig:

1) Die Zahl der Maschinen ist vergleichbar der Zahl der Zustände.Dann wird die Matrixmethode mit Erfolg angewendet.
2) Die Zahl der Maschinen ist lediglich größer als die Zahl der Zustände,die Reparaturzeit exponentiell verteilt,eine Reparaturstelle vorhanden. In diesem Fall ist die Methode der erzeugenden Funktionen für Systeme mit Ringschluß anwendbar.

In fast allen anderen Fällen wird man eine Kombination aus Matrixmethode und der Methode der erzeugenden Funktionen wählen.

Die Verteilungsfunktion F von $\mathrm{Min}(A_1, A_2 \ldots A_n)$, wo die A_i unabhängig mit F_i verteilt sind, ist gegeben durch

$F(t)=P[\mathrm{Min}(A_1,A_2 \ldots A_n) \leq t]=1-P[\mathrm{Min}(A_1,A_2,\ldots A_n) \geq t]=$

$1-P(A_1 \geq t) \ldots . P(A_n \geq t)=1-(1-F_1(t))(1-F_2(t)) \ldots (1-F_n(t))$

Hat man also die Besetzungszahlen der Zustände ermittelt, so lassen sich auch die Verteilungen der Ankunftszeitdifferenzen angeben. Diese sind besonders einfach, wenn die Laufzeiten exponentiell verteilt sind. Bei k ausgefallenen Maschinen ist die Ankunftszeitdifferenz verteilt mit

$$1 - e^{-\lambda t(N-k)} (1 - F * \bar{G})(1 - F * G * \bar{G}) \ldots (1 - F * \bar{G} * G^{*(k-1)})$$

Dabei ist G^{*i} die i-fache Faltung von G mit sich selbst. $\bar{G}$ ist die Verteilung der restlichen Reparaturzeit jener Maschine, die beim Ausfall der k-ten Maschine gerade repariert wird. Für $N \longrightarrow \infty$, $\lambda \longrightarrow 0$, aber derart, daß $\lambda \cdot N = \lambda_1$ konstant bleibt, ist die Ankunftszeitdifferenz verteilt mit $1-\exp(-\lambda_1 t)$, wird also von der Zahl der ausgefallenen Maschine unabhängig. Sind diese Bedingungen nicht gegeben, so wird die Ankunftszeitdifferenz nicht exponentiell verteilt sein. Hat man die Verteilung von dieser ermittelt, so läßt sich daraus die Verteilung der Wartezeiten bzw. Leerzeiten errechnen.

2. Verkehrsprobleme

Gesucht werde die Zahl von Fahrzeugen,die in einem be - stimmten Zeitintervall der Länge t die Kontrollstelle einer Strasse passieren.Diese Zahl läßt sich messen und man bekommt bei oftmaliger Wiederholung eine Wahrscheinlichkeitsverteilung des Verkehrsstroms.

Richtet man in bestimmtem Abstand x von der ersten Kontrollstelle eine zweite ein, so wird man auch an dieser den Verkehrsstrom verfolgen können.Er ist von dem Strom an der ersten Messstelle abhängig und zwar umso mehr, je weniger die Geschwindigkeiten der Fahrzeuge von einander abweichen.Sind sie genau gleich(v),so ist der Durchgang an der zweiten Kontrollstelle der selbe wie an der ersten, lediglich mit einer zeitlichen Verschiebung der Größe x/v. Im Fall eines stationären Stromes,wenn also die Zahl der Fahrzeuge,die eine Kontrollstelle passieren,lediglich von der Intervall-Länge,aber nicht vom Anfangspunkt des Intervalls abhängen (im wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinne),spielt diese zeitliche Verschiebung keine Rolle.In jedem Zeitintervall passieren genauso viele Fahrzeuge (d.h.gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung)die erste wie die zweite Kontrollstelle (wie groß auch x sei!).Die Verteilung der Fahrzeuge auf der Strecke zwischen den beiden Kontrollstellen ändert sich also nicht .Man hat hier also den Idealfall eines stationären Stufenprozesseß ohne Ringschluß vor sich. (mit beliebig vielen Stufen)

Ist die Gleichheit der Geschwindigkeiten nicht gegeben, so werden auch die die beiden Kontrollstellen passierenden Verkehrsströme von einander abweichen.Es sei aber zumindest ein Verteilungsgesetz für die Geschwindigkeiten vorgegeben,das etwa aus anderen Messungen stammen möge.

Für die vorliegenden Zwecke interessiert die Verteilung von 1/v, deren Dichte mit f(1/v) bezeichnet werden soll. Das Resultat der Aufgabe des konstanten v ist u.a., daß eine bei der Kontrollstelle 1 vorgenommene Numerierung der Fahrzeuge für die Kontrollstelle 2 nicht mehr gilt. Ist eine gegenseitige Überholung von Fahrzeugen zwischen den beiden Kontrollstellen vernachlässigt (was für nicht zu verschiedene Geschwindigkeiten und zu große Abstände der Kontrollstellen sicher gilt) so treffen die Fahrzeuge an beiden Punkten in der gleichen Reihenfolge ein.

Der Fall mit Überholungen ist mit ähnlichen Methoden erfaßbar wie der ortsabhängiger Geschwindigkeiten, doch soll hierauf nicht weiter eingegangen werden.
Ist etwa die erzeugende Funktion des Verkehrsstroms an der ersten Kontrollstelle vorgegeben, und gleich ~~XXXXX~~ $Q(t) = \sum v_k(t)\, u^k$, wo $v_k(t)$ nach dem Vorbild von S.3 die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß im Intervall der Länge t k Fahrzeuge passieren, so ergibt sich die erzeugende Funktion durch Faltung von Q mit der Wahrscheinlichkeitsdichte der Funktion $1/v = \tau/x$

$$Q_1(t) = \int_0^t Q(t-\tau)\, f(\tau/x)\ \ 1/x\, d\tau$$

Dies ist eine Gleichung zur Bestimmung von $Q_1(t)$ aus den Größen Q(t) und f(1/v). Dazu wird auf Q(t) ein Integraloperator angewandt. Die Funktion f(1/v) spielt dabei die Rolle einer Übertragungsfunktion, wie sie etwa auch in elektrischen Schltungen auftritt.

Oft interessiert folgendes Problem: Wie muß Q(t) beschaffen sein, damit bei vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung bei der Meßstelle 2 dieselbe Verteilung auftritt, so daß also $Q(t) = Q_1(t)$.

Es ist dann also eine Integralgleichung vom Wiener-Hopf'schen Typ zu lösen, wie sie bei der Lösung von Wartezeitproblemen von den verschiedensten Autoren verwendet wurde. [4] [5] [6] [7]

Soweit zum Verkehr zwischen nicht weit auseinanderliegenden Kontrollstellen an einer Strasse.

Oft liegen an einer Strasse Baustellen vor, oder eine Zollstelle, die jedes Fahrzeug passieren muß.Ein solcher Engpaß hat eine gewisse Durchlaß-oder Abfertigungswahrscheinlichkeit, die man ins Kalkül mit einbeziehen muß. Gerade diese Fälle von Verkehrsströmen, die durch solche Engpässe aufgehalten werden, können mit den in dieser Arbeit behandelten Methoden untersucht werden. Besonders interessant sind folgende beiden Fälle:

1.Der Engpaß kann in einer Kolonne mit gleichem Abstand zwischen den einzelnen Fahrzeugen passiert werden (die etwa zwischen den Schwerpunkten, Rücklichtern o.a. gemessen sind).Hierin ist etwa auch der Fall einer Kolonne auf einer stark befahrenen Strasse enthalten. Das Modell des Fließbandes führt dabei weiter.

2. Der Engpaß kann nur einzeln passiert werden. Dann wird die Passierzeit die Rolle der Bearbeitungszeit in einem Produktionsprozeß übernehmen.

In den hier behandelten Verkehrsproblemen mit Engpässen ist etwa auch der Fall enthalten, wo im Produktionsprozeß Transporte zwischen den einzelnen Produktionsstellen nötig sind.

---

[4] Die V.LINDLEY (Proc.Camb.Phil.Soc.48,277),
[5] W.L.SMITH (Proc.Camb.Phil.Soc.49,449)
[6] KIEFER,WOLFOWITZ (Trans.Amer.Math.Soc.78,1)
[7] F.SPITZER (Duke Math.J.24,327)

3. Lagerhaltung:

Während des Produktionsprozesses treten eine ganze Reihe von Zwischenlagern auf, die eine unendliche (für die Methode der erzeugenden Funktionen) oder endliche Kapazität (für die Matrixmethode)haben. Die Lagerkosten während einer Periode werden sich nach dem Erwartungswert des Lagerbestandes richten und zwar nach seinem Integral über diese Periode (s.Ferschl [2]). Dieses Problem wird besonders einfach im Falle der unendlichen oder zumindest grossen Lagerkapazität. Man wird dann nämlich die erzeugende Funktion für das betreffende Lager aussuchen können.Diese gewinnt man, aus der erzeugenden Funktion für den aus Lager und nächster Produktionsstufe bestehenden Zustand dadurch, daß man so viel Glieder abzieht, wie die Produktionsstufe Einheiten aufnehmen kann (etwa r) und dann durch die r-te Potenz der betreffenden Zustandsvariablen dividiert. Die so ermittelte erzeugende Funktion wird dann nach der Zustandsvariablen differenziert und im Ergebnis die Zustandsvariable gleich 1 gesetzt. Das ist dann der gesuchte Erwartungswert. Integration über die Periode gibt dann die für die Lagerkosten wichtige Größe.

4. Stochastische Entscheidungsprozesse

Bei der Besprechung der blockierten Systeme wurde bereits erwähnt, daß man der Abwicklung einer Bearbeitung einen stochastischen Prozeß zuordnen kann(Entscheidungsprozeß) und zwar ganz bestimmter Art:Mit bestimmter Wahrscheinlichkeit wird die Bearbeitung während der Zeit dt beendet, mit der Komplementärwahrscheinlichkeit wird sie fortgesetzt.

---

[2] F.FERSCHL: Zufallsabhängige Wirtschaftsprozesse

Auch die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den einzelnen Zuständen können als Entscheidungen gedeutet werden.
Der Beriff des Entscheidungsprozesses läßt sich ganz erheblich verallgemeinern. Entscheidungen werden i.a. in Erwartung kommender Ereignisse getroffen.Ein typisches Beispiel ist das folgende:
Es werde in einem Zeitpunkt t_o durch Anwendung einer bestimmten Methode produziert. Ist dann die Lösung der zeitabhängigen Produktionsgleichung für die erzeugende Funktion, also etwa Gl.(78), Gl.(83) oder Gl.(95) bekannt, so weiß man die Verteilung der produzierten Einheiten bis zum Zeitpunkt t_1, dem Ende einer Produktionsperiode.
Oft ist es garnicht einmal nötig, dazu die erzeugende Fuktion selbst zu kennen, sondern lediglich den Erwartungswert und die Varianz des betreffenden Zustandes.Diese ergeben sich ganz einfach durch Differenzieren der genannten Gleichungen nach den entsprechenden Zustandsvariablen und anschließendem eins-Setzen aller Variablen. Aufgrund des Produktionsergebnisses wird man dann im Zeitpunkt t_1 seine Entscheidung über die Produktionsmethode in der nächsten Periode treffen.

Literaturverzeichnis

Teil A

EUCKEN:

Grundlagen der Nationalökonomie, Godesberg 1947

GUTENBERG,E:

Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre,Bd.I (1951)

SCHNEIDER,E:

Das Gesicht der Wirtschaftstheorie unserer Zeit und das Studium der Wirtschaftswissenschaften,Tübingen 1947

SCHNEIDER,H:

Philosophisches Wörterbuch

SCHÖNPFLUG:

Methoden-Probleme in der Einzelwirtschaftslehre, Stuttgart 1933

WÖHE,H:

Methodologische Grundprobleme in der Betriebswirtschaftslehre,Meisenheim 1959

Teil B:

[1] A.J.CHINTSCHIN
Mathematical Methods in the theory of queueing, London:Griffin 1960

[2] FRAY
Theory of probality for engineers ("Gostechizdat") 1934

[3] A.J.CHINTSCHIN
Matematiceski Sbornik T 40, 2

[4] C.PALM
Industrisidningen Norden 75, 75 (1947)

[5] GNEDENKO-KOLMOGOROW:
Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen (Akad.Verl.Berlin 1959)

[6] A.DOIG
A.Bibliography on the Theory of Queues (Biometrika 44, 490, 1957)

[7] F.BENSON,D.R.COX
The Productivity of Machines Requiring Attention at Random Intervals J.R.Statist.Soc.B. 13,65 (1951)

[8] E.B.DYNKIN
Die Grundlagen der Theorie der Markoffschen O Prozesse,Springer Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961

[9] A.K.ERLANG (1878-1929)

[1o] E.BROCKMEYER,H.HALSTRØM,A.JENSEN
The Life and Works of A.K.Erlang.Kopenhagen 1948

[11] D.R.COX,W.L.SMITH
Queues.London:Methuen (1961)

[12] G.DOETSCH
Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Birkhäuser-Verlag Basel 1958

[13] K.PEARSON
Tables of the incomplete -Fct.London:Biometrica 1934, Tables of the incomplete Beta-Fct. London:Biometrica 1934

[14] H.JEFFREYS
Theory of Probability,3.ed.,Oxford:Clarendon-Press 1961

[15] D.R.COX
A use of complex probability in the theory of stochastic processes (Proc.Camb.Phil.Soc.51,313-19)

Teil C:

[1] K.FÖRSTNER
Über das Auftreten und die Berechnung von Warte - schlangen (in R.HENN:Operations Research-Verfahren, Meisenheim 1963 S. 191)

[2] F.PERSCHL
Zufallsabhängige Wirtschaftsprozesse (Grundlagen und Anwendungen der Theorie der Wartesysteme) Physica-Verlag, Wien,Würzburg 1964)

[3] R.HENN
Stochastische Entscheidungsaufgaben bei Investition und Lagerhaltung (in R.HENN: Operations Research-Verfahren, Meisenheim 1963 S.151)

[4] D.V.LINDLEY
The Theory of queues with a single server
Proc.Camb.Phil. Soc. 48, 277-89

[5] W.L.SMITH
On the distribution of queueing times
Proc.Camb.Phil.Soc. 49, 449-61

[6] KIEFER,WOLFOWITZ
On the theory of queues with many servers
Trans.Amer.Math.Soc. 78, 1-18

[7] F.SPITZER
The Wiener-Hopf equation whose kernel is a probability density Duke Math.J. 24, 327-343

K.KRICKEBERG
Wahrscheinlichkeitstheorie. Teubner-Verlagsgesellschaft Stuttgart 1963

L E B E N S L A U F

16.6.1937 geboren in Bremen

Vater: Dr.med.dent.Hermann HOHN,Zahnarzt

Mutter: Ehefrau Lony, geb. Ott

1943-1948 Volksschule - Bremen-Osterholz

1948-1956 Oberschule a.d. Dechanatstrasse, Bremen

10.2.1956 Reifeprüfung

7.5.1956 Immatrikulation an der Universität Göttingen

Fächer: Mathematik, Physik, Chemie

W.S. 1958/59

Zweiteinschreibung in der damaligen rechts- und staatswissenschaftlichen Fakultät für das Fach Betriebswirtschaft

25.2.1959 Diplomvorprüfung Physik

27.7.1962 Diplomhauptprüfung Physik

5.11.1962 Die wirtschafts-und sozialwissenschaftliche Fakultät erkennt das physikalische Diplom als Ersatz für ein wirtschaftswissenschaftliches an.

Dez.1962 Anregung der Dissertation durch Prof.Dr. A. ANGERMANN

W.S.1962/63 u.S.S.1963

Erwerb der zur Promotion noch fehlenden

Scheine

15.10.1964 Fertigstellung der Dissertation, Einreichung bei Prof.Dr.A.ANGERMANN

seit 1.12.1963:

Hilfsassistent am Lehrstuhl für Theoretische Chemie

Anfertigung einer zweiten Dissertation bei Prof.Dr.W.A.BINGEL